

Universidade Federal de Sergipe  
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa  
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

**Ciclos Principais Hiperbólicos em Hipersuperfícies do**  
 $\mathbb{R}^4$

por

**Dayane Ribeiro Cruz**

**Orientadora: Dra. Débora Lopes da Silva**

dayanemat29@gmail.com  
**São Cristóvão - SE**  
**Fevereiro de 2016**

Universidade Federal de Sergipe  
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa  
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

**Ciclos Principais Hiperbólicos em Hipersuperfícies do**  
 $\mathbb{R}^4$

por

**Dayane Ribeiro Cruz**

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dra. Débora Lopes da Silva

dayanemat29@gmail.com  
**São Cristóvão - SE**  
**Fevereiro de 2016**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Cruz, Dayane Ribeiro  
C957c Ciclos principais hiperbólicos em hipersuperfícies do  $R^4$  / Dayane Ribeiro Cruz ; orientador Débora Lopes da Silva. - São Cristóvão, 2016.  
56 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Superfícies (Matemática). 2. Hipersuperfícies. 3. Poincaré, Séries de. 4. Espaços hiperbólicos. 5. Curvatura. I. Silva, Débora Lopes da, orient. II. Título.

CDU 517.956.3



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

**Ciclos Principais em Hipersuperfícies do  $\mathbb{R}^4$**   
*por*

*Dayane de Oliveira Ribeiro*

Aprovada pela banca examinadora:

Prof. Dr. Debora Lopes da Silva - UFS  
Orientador

Prof. Dr. Humberto Henrique de Barros Viglioni - UFS  
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia - UFG  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 25 de Fevereiro de 2016

# Sumário

<b>1</b>	<b>Pré-requisito</b>	<b>2</b>
1.1	Primeira e segunda formas fundamentais . . . . .	6
1.2	O mapa de Poincaré . . . . .	10
1.3	Equações de Darboux para um ciclo principal . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Coordenadas em torno de Ciclos Principais</b>	<b>15</b>
2.1	Primeira e segunda forma fundamentais . . . . .	22
2.2	A derivada da Transformação de Poincaré . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Ciclos Principais Hiperbólicos de Hipersuperfícies imersas no <math>\mathbb{R}^4</math></b>	<b>29</b>
<b>4</b>	<b>Hipersuperfície em torno de Ciclos Principais Hiperbólicos, um problema inverso</b>	<b>36</b>
<b>A</b>	<b>Aplicações lineares Auto-Adjuntas e Formas Quadráticas</b>	<b>47</b>

# Dedicatória

*Aos meus pais e ao meu marido.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo e principalmente por ter posto em minha vida pessoas maravilhosas, sem as quais não conseguiria finalizar mais esta importante etapa da minha vida.

Aos meus pais, Lourdes e Ademiltom, por me amarem, investirem e acreditarem em mim.

Aos meus tios, Verônica e Eronildes, por serem como pais para mim e me incentivarem a estudar.

Ao meu marido Efraim que esteve ao meu lado ajudando e dando total apoio com paciência e amor.

À minha amiga Franciele que me ajudou muito durante todo o curso.

A todos os meus professores que tanto me ajudaram, principalmente a minha orientadora Débora Lopes da Silva que foi sempre atenciosa, paciente e de extrema importância para a conclusão deste trabalho.

Aos professores Humberto H. de B. Viglioni e Ronaldo A. Garcia por comporem a banca examinadora.

À agência financiadora deste trabalho, a CAPES.

E a todos os meus amigos e familiares que sempre torceram por mim.

# Resumo

Tomando como base o artigo “Hyperbolic Principal Cycles on Hypersurface of  $\mathbb{R}^4$ ”, de Garcia, ver [4], estudaremos as linhas de curvatura na vizinhança de um ciclo principal, linha de curvatura fechada, de uma hipersuperfície imersa no  $\mathbb{R}^4$ . Para isso, definiremos a transformação de Poincaré associada ao ciclo e calcularemos a sua derivada. Com essa análise, mostraremos sob quais condições podemos tornar hiperbólico, com uma pequena deformação na imersão, um ciclo principal dado. E por fim, construiremos um exemplo de uma hipersuperfície contendo um ciclo principal hiperbólico, baseando-nos no artigo “Surfaces Around Closed Principal Curvature Lines, an Inverse Problem.” de Garcia, Mello e Sotomayor, ver [5].

**Palavras-chaves:** Linha de Curvatura, Ciclo Principal Hiperbólico, Hipersuperfície, Mapa de Primeiro Retorno de Poincaré.



# Abstract

Based on the article “Hyperbolic Main Cycles on Hypersurface of  $\mathbb{R}^4$ ,” Garcia, see [4], we will study the bending lines in the vicinity of a main loop, closed bending line, a hypersurface immersed in  $\mathbb{R}^4$ . For this, we will define the Poincaré transformation associated with the cycle and calculate its derivative. With this analysis, we show under what conditions we can become hyperbolic, with a small deformation in the immersion, a major cycle given. Finally, we will build an example of a hypersurface containing a hyperbolic primary cycle, based on the article “Surfaces Around Closed Main Curvature Lines, an Inverse Problem.” Garcia, Mello and Sotomayor, see [5].

**Keywords:** Curvature Line, Home Cycle Hyperbolic, Hypersurface First Return Poincaré Map.

# Introdução

Deve-se ao matemático e físico Leonhard Euler (“Recherches sur la courbure des surfaces”, Mémoires de l’Academie de Sciences de Berlin, 16, 1760) o primeiro estudo sobre curvaturas principais, com o qual se inaugura o uso do Cálculo Diferencial na investigação da geometria de Superfícies.

Em 1796, o matemático francês Gaspard Monge calculou as linhas de curvaturas principais e localizou os quatro pontos umbílicos do elipsoide com eixos distintos, hoje conhecido como Elipsoide de Monge.

O estudo das características globais das linhas de curvatura, numa vizinhança de um ciclo principal, que permanecem topologicamente imperturbável, sob pequenas perturbações da imersão  $\alpha : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , onde  $M^n$  é uma variedade orientável e compacta de dimensão  $n$ , foi iniciada por Gutierrez e Sotomayor, em [6], para o caso  $n = 2$  e por Garcia, em [4], para o caso  $n = 3$ .

Neste trabalho estudaremos o comportamento da linhas de curvatura principais numa vizinhança de ciclos principais, também conhecidas como folhas compactas. Para isso analisaremos o artigo de Garcia “Hyperbolic Principal Cycles on Hypersurfaces of  $\mathbb{R}^4$ ”, ver [4].

No primeiro capítulo daremos definições e resultados preliminares para o entendimento do artigo que se baseia esse trabalho. Aqui faremos generalizações de conceitos e propriedades de superfícies para hipersuperfície, e definiremos o mapa de primeiro retorno de Poincaré (ou transformação de Poincaré) associado a um ciclo principal de uma hipersuperfície imersa no  $\mathbb{R}^4$ .

No segundo capítulo definiremos uma parametrização, chamada canaleta, na qual calcularemos a derivada da transformação de Poincaré para uma imersão de uma hipersuperfície imersa no  $\mathbb{R}^4$ .

No terceiro capítulo mostraremos uma perturbação na imersão  $\alpha$  que terá  $c$  como ciclo principal hiperbólico, para os casos em que a derivada da transformação de Poincaré  $\Pi'(0)$  de  $\alpha$  em  $c(0)$  tiver autovalores complexos de módulo igual a um, ou o determinante de  $\Pi'(0)$  for diferente de zero e um dos seus autovalores tiverem módulo igual a um.

Por fim, tomando como base o artigo “Surfaces Around Closed Principal Curvature Lines, an Inverse Problem.”, de Garcia, Mello e Sotomayor, ver [5], definiremos condições para que dada uma curva fechada simples do  $\mathbb{R}^4$ , suficientemente diferenciável, exista uma hipersuperfície orientada tendo essa curva como ciclo principal hiperbólico.

# Capítulo 1

## Pré-requisito

A fim de expor os resultados deste trabalho os seguintes conceitos e notações serão introduzidos.

**Definição 1.1** *Seja  $M$  uma variedade topológica. Considere o seguinte conjunto*

$$\mathcal{A} = \left\{ (\phi, V_i) \mid M = \bigcup_{i \in I} V_i, \phi_i : V_i \rightarrow U_i \text{ é um homeomorfismo} \right\},$$

onde  $V_i \subset M$  e  $U_i \subset \mathbb{R}^n$  são abertos. Dizemos que  $\mathcal{A}$  é um atlas para a variedade  $M$ . As funções  $\phi_i$  serão chamadas de carta local. E suas inversas serão chamadas de parametrizações locais de  $M$ . Chamaremos também de mudança de coordenadas as funções do tipo  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ .

**Definição 1.2** *(Topologia de Whitney) A topologia de Whitney de  $C^r(M, N)$  é definida declarando-se os abertos que geram a sua topologia, construídos a seguir.*

Sejam  $f \in C^r(M, N)$ ,  $\Phi = \{\phi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$  atlas de  $M$  localmente finito,  $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$  cobertura por compactos de  $M$  com  $K_i \subset U_i$  tal que  $f(U_i) \subset V_i$ , onde  $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i \in \Lambda}$  atlas de  $N$  e  $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in \Lambda}$ .

Definimos portanto uma vizinhança fundamental  $\mathcal{N}^r(f; \psi, \phi, K, \varepsilon)$  de  $f$  como sendo o conjunto das  $g : M \rightarrow N$  tal que para todo  $i \in \Lambda$ ,  $g(K_i) \subset V_i$  e  $\|D^k(\phi_i f \psi_i^{-1})(x) - D^k(\phi_i g \psi_i^{-1})(x)\| < \varepsilon_i$  para todo  $x \in \phi_i(K_i)$ ,  $k = 0, \dots, r$ .

**Definição 1.3** *(Imersão) Seja  $M^3$  uma variedade tridimensional compacta e orientada de classe  $C^k$ ,  $k \geq 4$ . Uma imersão  $\alpha$  de  $M^3$  em  $\mathbb{R}^4$  é uma aplicação tal que  $D\alpha_p : T_p M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  é injetiva, para todo  $p \in M^3$ .*

**Notação:** Denote por  $\mathcal{J}^k = \mathcal{J}^k\{M^3, \mathbb{R}^4\}$  o conjunto das imersões de classe  $C^k$  de  $M^3$  em  $\mathbb{R}^4$ . Quando dotado com a Topologia de Whitney  $C^s$ ,  $s \leq k$  esse conjunto é denotado por  $\mathcal{J}^{k,s}$ .

**Definição 1.4** (*Vetor normal*): Associado a todo  $\alpha \in \mathcal{J}^k$  está definido o mapa normal  $N_\alpha : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , dada por

$$N_\alpha = \frac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3}{|\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3|},$$

onde  $(u_1, u_2, u_3) : (M, p) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$  é uma carta positiva de  $M^3$  em torno de  $p$ ,  $\wedge$  denota o produto exterior de vetores em  $\mathbb{R}^4$ ,  $\alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}$ ,  $\alpha_3 = \frac{\partial \alpha}{\partial u_3}$  e  $|\cdot| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$  é a norma euclidiana.

$N_\alpha$  está bem definido e é de classe  $C^{k-1}$  em  $M^3$ . De fato,  $N_\alpha$  está bem definido porque  $\alpha(M^3)$  é orientada e como  $\alpha$  é de classe  $C^k$  e  $N_\alpha$  é o produto exterior de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , temos que  $N_\alpha$  é de classe  $C^{k-1}$ .

**Definição 1.5** (*Aplicação de Gauss*) Seja  $\alpha(M^3) \subset \mathbb{R}^4$  uma hipersuperfície com orientação  $N_\alpha$ . A aplicação  $N_\alpha : \alpha(M^3) \rightarrow \mathbb{R}^4$  toma seus valores na esfera unitária

$$S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}.$$

A aplicação  $N : \alpha(M^3) \rightarrow S^3$ , assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de  $\alpha(M^3)$ .

$N$  é de classe  $C^{k-1}$  e a diferencial  $DN_p$  de  $N$  em  $p \in \alpha(M^3)$  é uma aplicação linear de  $T_p\alpha(M^3)$  em  $T_{N(p)}S^3$ . Como ambos espaço vetoriais de dimensão três,  $DN_p$  pode ser olhada como um operador linear em  $T_p\alpha(M^3)$ .

**Proposição 1.6** A diferencial  $DN_p : T_p\alpha(M^3) \rightarrow T_p\alpha(M^3)$  da aplicação de Gauss é uma aplicação auto-adjunta.

**Demonstração:** Como  $DN_p$  é linear, basta verificar que  $\langle DN_p(w_i), w_j \rangle = \langle w_i, DN_p(w_j) \rangle$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , para uma base  $\{w_1, w_2, w_3\}$  de  $T_p\alpha(M^3)$ . Se  $c(t) = \alpha(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$  é uma curva parametrizada em  $\alpha(M^3)$ , com  $c(0) = p$ , temos

$$\begin{aligned} DN_p(\alpha'(0)) &= DN_p(\alpha_1 u'_1(0), \alpha_2 u'_2(0), \alpha_3 u'_3(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \Big|_{t=0} \\ &= N_1 u'_1(0) + N_2 u'_2(0) + N_3 u'_3(0), \end{aligned}$$

em particular  $DN_p(\alpha_1) = N_1$ ,  $DN_p(\alpha_2) = N_2$  e  $DN_p(\alpha_3) = N_3$ . Portanto, para provar que  $DN_p$  é auto-adjunta, é suficiente mostrar que

$$\langle N_i, \alpha_j \rangle = \langle DN_p(\alpha_i), \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i, DN_p(\alpha_j) \rangle = \langle \alpha_i, N_j \rangle, i \neq j, i, j = 1, 2, 3.$$

Para isso vamos derivar  $\langle N, \alpha_k \rangle = 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ , em relação a  $u_l$ ,  $l \neq k$ ,  $l = 1, 2, 3$ . Segue que

$$\langle N_2, \alpha_1 \rangle + \langle N, \alpha_{12} \rangle = 0 \quad (1.1)$$

$$\langle N_3, \alpha_1 \rangle + \langle N, \alpha_{13} \rangle = 0 \quad (1.2)$$

$$\langle N_1, \alpha_2 \rangle + \langle N, \alpha_{12} \rangle = 0 \quad (1.3)$$

$$\langle N_3, \alpha_2 \rangle + \langle N, \alpha_{23} \rangle = 0 \quad (1.4)$$

$$\langle N_1, \alpha_3 \rangle + \langle N, \alpha_{13} \rangle = 0 \quad (1.5)$$

$$\langle N_2, \alpha_3 \rangle + \langle N, \alpha_{23} \rangle = 0 \quad (1.6)$$

De (1.1) e (1.3), temos que

$$\langle N_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_1, N_2 \rangle.$$

De (1.2) e (1.5), temos que

$$\langle N_3, \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_3, N_1 \rangle.$$

De (1.4) e (1.6), temos que

$$\langle N_3, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_3, N_2 \rangle.$$

Assim, temos o que queríamos. ■

**Proposição 1.7** *Existe um endomorfismo<sup>1</sup>  $w_\alpha : TM^3 \rightarrow TM^3$  satisfazendo a relação  $D\alpha \circ w_\alpha = DN_p$ .*

**Demonstração:** Como  $DN_p$  tem sua imagem contida na de  $D\alpha(p)$ , podemos escrever  $DN_p$  na base  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  de  $TM^3$ . De fato,

$$N_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3$$

$$N_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3$$

$$N_3 = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3$$

---

<sup>1</sup>É um processo de transformação de um conjunto sobre ele mesmo que não altera as operações definidas.

Daí,

$$\begin{aligned}
DN_p(u'_1, u'_2, u'_3) &= N_1 u'_1 + N_2 u'_2 + N_3 u'_3 \\
&= (a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3)u'_1 \\
&\quad + (a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3)u'_2 \\
&\quad + (a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3)u'_3 \\
&= (a_{11}u'_1 + a_{12}u'_2 + a_{13}u'_3)\alpha_1 \\
&\quad + (a_{21}u'_1 + a_{22}u'_2 + a_{23}u'_3)\alpha_2 \\
&\quad + (a_{31}u'_1 + a_{32}u'_2 + a_{33}u'_3)\alpha_3.
\end{aligned}$$

Assim, definindo

$$w_\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

teremos

$$\begin{aligned}
D\alpha \circ w_\alpha &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \\
&= DN_p
\end{aligned}$$

Logo, temos o que queríamos. ■

**Definição 1.8** (*Curvaturas principais e direções principais*) Os valores opostos dos autovalores de  $w_\alpha$  são chamados de curvaturas principais e serão denotados por  $k_1 \leq k_2 \leq k_3$ . Os autovetores de  $w_\alpha$  são chamados de direções principais.

O teorema do apêndice A mostra que para cada  $p \in \alpha(M^3)$  existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $T_p\alpha(M^3)$ , tal que  $DN_p(e_1) = -k_1 e_1$ ,  $DN_p(e_2) = -k_2 e_2$ ,  $DN_p(e_3) = -k_3 e_3$ . Além disso,  $k_1$  e  $k_3$  ( $k_1 \leq k_2 \leq k_3$ ) são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental  $II_p$  restrita à esfera unitária de  $T_p\alpha(M^3)$ ; isto é, são os valores extremos da curvatura normal em  $p$ . E temos ainda que  $k_2$  é o máximo de  $II_p$  restrito ao círculo unitário ortogonal à  $e_1$ .

**Definição 1.9** (*Campos de linhas principais*) Os auto-espaços associados às curvaturas principais definem três campos de linhas  $C^{k-2} \mathcal{L}_i(\alpha)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) mutuamente ortogonais em  $TM^3$  (com a métrica  $\langle, \rangle_\alpha$ ) chamados campos de linhas principais de  $\alpha$ .

**Definição 1.10** (Conjunto singular de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$ ) O conjunto singular de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$  é o conjunto  $S_i = \{p \in M : k_i(p) \text{ não é um autovalor simples de } w_\alpha\}$

**Definição 1.11** (Linhas de curvatura principal) As curvas integrais de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) fora do seu conjunto singular, são chamadas linhas de curvatura principal.

**Definição 1.12** (Folheação Principal) A família de tais curvas, isto é, a folheação integral de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$  serão denotadas por  $\mathcal{F}_i(\alpha)$  e são chamadas de folheações principais de  $\alpha$ .

**Definição 1.13** (Ciclo Principal) As folhas compactas de uma folheação principal são chamadas de ciclos de curvatura principal ou simplesmente ciclos principais.

**Definição 1.14** (Ciclo principal hiperbólico) Um ciclo principal de  $\mathcal{F}_i(\alpha)$  é chamado hiperbólico se a derivada do mapa de Poincaré associado é um isomorfismo hiperbólico, isto é, os autovalores não pertencem ao círculo unitário  $S^1 \subset \mathbb{C}$ .

## 1.1 Primeira e segunda formas fundamentais

**Definição 1.15** (Primeira forma quadrática) Seja  $\alpha : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \alpha(M^3)$  uma parametrização de uma vizinhança de  $\alpha(M^3)$ ,  $\forall p \in \alpha(U)$ , a aplicação

$$I_p : T_p\alpha(M^3) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto I_p(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2.$$

Considerando uma hipersuperfície dada por  $\alpha$  e um ponto  $p = \alpha(u_1, u_2, u_3)$ , temos que um vetor  $w \in T_p\alpha(M^3)$  é da forma

$$w = u'_1\alpha_1(u_1, u_2, u_3) + u'_2\alpha_2(u_1, u_2, u_3) + u'_3\alpha_3(u_1, u_2, u_3)$$

$$= u'_1\alpha_1 + u'_2\alpha_2 + u'_3\alpha_3.$$

Portanto

$$I_p(w) = \langle u'_1\alpha_1 + u'_2\alpha_2 + u'_3\alpha_3, u'_1\alpha_1 + u'_2\alpha_2 + u'_3\alpha_3 \rangle$$

$$= (u'_1)^2 \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + u'_1 u'_2 \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + u'_1 u'_3 \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle + u'_2 u'_1 \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle$$

$$+ (u'_2)^2 \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle + u'_2 u'_3 \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle + u'_3 u'_1 \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle + u'_3 u'_2 \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle$$

$$+ (u'_3)^2 \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle$$

$$= (u'_1)^2 \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + (u'_2)^2 \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle + (u'_3)^2 \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle + 2u'_1 u'_2 \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$$

$$+ 2u'_1 u'_3 \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle + 2u'_2 u'_3 \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle.$$



Tome  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = g_{ij}$ , então

$$I_p(w) = (u'_1)^2 g_{11} + (u'_2)^2 g_{22} + (u'_3)^2 g_{33} + 2u'_1 u'_2 g_{12} + 2u'_1 u'_3 g_{13} + 2u'_2 u'_3 g_{23}.$$

**Definição 1.16** (Segunda forma quadrática) A forma quadrática  $II_p$  associada a  $DN_p$ , definida em  $T_p \alpha(M^3)$  por  $II_p(v) = -\langle DN_p(v), v \rangle$  é chamada a segunda forma fundamental de  $\alpha(M^3)$  em  $p$ .

**Definição 1.17** (Curvatura Normal) Seja  $C$  uma curva regular em  $\alpha(M^3)$  passando por  $p \in \alpha(M^3)$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$ , e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a curva  $C$  e  $N$  é o vetor normal à  $\alpha(M^3)$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cos \theta$  é chamado a curvatura normal de  $C \subset \alpha(M^3)$  em  $p$ .

Considere uma curva  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \alpha(M^3) \subset \mathbb{R}^4$  contida em  $\alpha(M^3)$ , dada por  $c(t) = \alpha(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$  e  $N(t)$  o vetor normal restrito à  $c$ .

Note que  $\langle N(t), c'(t) \rangle = 0$ , derivando temos que

$$-\langle DN_p(t), c'(t) \rangle = \langle N(t), c''(t) \rangle.$$

Assim, podemos tomar  $II_p(v) = \langle c''(t_0), N(t_0) \rangle$ , sendo  $c'(t_0) = v$ .

Temos que

$$c'(t) = u'_1(t) \alpha_1(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) + u'_2(t) \alpha_2(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) + u'_3(t) \alpha_3(u_1(t), u_2(t), u_3(t)),$$

derivando a expressão acima em relação a  $t$ , temos

$$\begin{aligned} c''(t) &= u''_1 \alpha_1 + u'_1(u'_1 \alpha_{11} + u'_2 \alpha_{12} + u'_3 \alpha_{13}) + u''_2 \alpha_2 + u'_2(u'_1 \alpha_{21} \\ &\quad + u'_2 \alpha_{22} + u'_3 \alpha_{23}) + u'_3 \alpha_3 + u'_3(u'_1 \alpha_{31} + u'_2 \alpha_{32} + u'_3 \alpha_{33}) \\ &= u''_1 \alpha_1 + (u'_1)^2 \alpha_{11} + u''_2 \alpha_2 + (u'_2)^2 \alpha_{22} + u''_3 \alpha_3 + (u'_3)^2 \alpha_{33} \\ &\quad + 2u'_1 u'_2 \alpha_{12} + 2u'_1 u'_3 \alpha_{13} + 2u'_2 u'_3 \alpha_{23}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} II_p(v) &= \langle c''(t_0), N(t_0) \rangle \\ &= \langle u''_1 \alpha_1 + (u'_1)^2 \alpha_{11} + u''_2 \alpha_2 + (du_2)^2 \alpha_{22} + u''_3 \alpha_3 + (u'_3)^2 \alpha_{33} \\ &\quad + 2u'_1 u'_2 \alpha_{12} + 2u'_1 u'_3 \alpha_{13} + 2u'_2 u'_3 \alpha_{23}, N \rangle \\ &= u''_1 \langle \alpha_1, N \rangle + (u'_1)^2 \langle \alpha_{11}, N \rangle + u''_2 \langle \alpha_2, N \rangle + (u'_2)^2 \langle \alpha_{22}, N \rangle \\ &\quad + u''_3 \langle \alpha_3, N \rangle + (u'_3)^2 \langle \alpha_{33}, N \rangle + 2u'_1 u'_2 \langle \alpha_{12}, N \rangle \\ &\quad + 2u'_1 u'_3 \langle \alpha_{13}, N \rangle + 2u'_2 u'_3 \langle \alpha_{23}, N \rangle \\ &= (u'_1)^2 \langle \alpha_{11}, N \rangle + (u'_2)^2 \langle \alpha_{22}, N \rangle + (u'_3)^2 \langle \alpha_{33}, N \rangle \\ &\quad + 2u'_1 u'_2 \langle \alpha_{12}, N \rangle + 2u'_1 u'_3 \langle \alpha_{13}, N \rangle + 2u'_2 u'_3 \langle \alpha_{23}, N \rangle \end{aligned}$$

Tomando  $\lambda_{ij} = \langle \alpha_{ij}, N \rangle$ , temos que

$$II_p(v) = (u'_1)^2 \lambda_{11} + (u'_2)^2 \lambda_{22} + (u'_3)^2 \lambda_{33} + 2u'_1 u'_2 \lambda_{12} + 2u'_1 u'_3 \lambda_{13} + 2u'_2 u'_3 \lambda_{23}.$$

O que quer dizer que  $II_p$  independe da curva tomada.

Para dar uma interpretação da segunda forma fundamental  $II_p$ , considere que  $C$  seja parametrizada pelo comprimento do arco, com  $c(0) = p$ . Assim

$$\begin{aligned} II_p(c'(0)) &= \langle N(0), c''(0) \rangle \\ &= \langle N, kn \rangle(p) \\ &= k \langle N, n \rangle(p) \\ &= k_n(p). \end{aligned}$$

Em outras palavras, o valor da segunda forma fundamental  $II_p$  em um vetor unitário  $v \in T_\alpha(M^3)$  é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por  $p$  e tangente a  $v$ .

**Observação 1.18** *Observamos que os autovetores de  $DN_p$  são pontos críticos de  $k_n$ , visto que estes são pontos de máximo e mínimo de  $II_p$  restrita a esfera unitária e máximo de  $II_p$  restrita ao círculo unitário ortogonal à  $e_1$ .*

**Proposição 1.19** *(Olinde Rodrigues) Uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular  $C$  em  $\alpha(M^3)$  seja uma linha de curvatura de  $\alpha(M^3)$  é que*

$$N'(t) = \lambda(t)c'(t)$$

*para qualquer parametrização  $c(t)$  de  $C$ , onde  $N(t) = N \circ c(t)$  e  $\lambda(t)$  é uma função diferenciável de  $t$ . Nesse caso,  $-\lambda(t)$  é a curvatura (principal) segundo  $c'(t)$ .*

**Demonstração:** Seja  $C$  uma curva conexa e regular  $C$  em  $\alpha(M^3)$  uma linha de curvatura de  $\alpha(M^3)$ , e seja  $c(t)$  uma parametrização de  $C$ . Como  $c'(t)$  está contido em uma direção principal, então  $c'(t)$  é um autovetor de  $DN$  e

$$D(c'(t)) = N'(t) = \lambda(t)c'(t).$$

A recíproca é imediata. ■

Tendo a esfera  $S^3$  como domínio podemos representar  $k_n(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)}$ .

**Proposição 1.20** *Seja  $\alpha(u_1, u_2, u_3)$  uma parametrização de uma vizinhança de  $\alpha(M^3)$ . Um vetor unitário  $w = u'_1\alpha_1(p) + u'_2\alpha_2(p) + u'_3\alpha_3(p)$  tangente a  $\alpha(M^3)$  em  $p = \alpha(u_1^0, u_2^0, u_3^0)$  é uma direção principal de curvatura principal  $k_i$  se, e somente se,  $u'_1, u'_2, u'_3$  satisfazem o sistema de equações*

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} - k_i g_{11} & \lambda_{12} - k_i g_{12} & \lambda_{13} - k_i g_{13} \\ \lambda_{12} - k_i g_{12} & \lambda_{22} - k_i g_{22} & \lambda_{23} - k_i g_{23} \\ \lambda_{13} - k_i g_{13} & \lambda_{23} - k_i g_{23} & \lambda_{33} - k_i g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

**Demonstração:** Primeiro, suponhamos que  $w$  é uma direção principal e  $k_0 = k_n(w)$  é uma curvatura principal e mostramos que  $w$  satisfaz (1.7).

Pela observação 1.18, temos que as derivadas parciais de  $k_n$  em  $w$  são nulas.

Derivando  $k_n = \frac{II_p}{I_p}$  em relação a  $u'_1$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_n}{\partial u'_1}(u'_1, u'_2, u'_3) &= (2u'_1\lambda_{11} + 2u'_2\lambda_{12} + 2u'_3\lambda_{13})I_p(u'_1, u'_2, u'_3) \\ &\quad - (2u'_1g_{11} + 2u'_2g_{12} + 2u'_3g_{13})II_p(u'_1, u'_2, u'_3), \end{aligned}$$

sendo  $|(u'_1, u'_2, u'_3)| = 1$ , temos que  $I_p(u'_1, u'_2, u'_3) = 1$  e  $II_p(u'_1, u'_2, u'_3) = k_0$ , daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_n}{\partial u'_1}(u'_1, u'_2, u'_3) &= 2u'_1\lambda_{11} + 2u'_2\lambda_{12} + 2u'_3\lambda_{13} - 2u'_1g_{11}k_0 + 2u'_2g_{12}k_0 \\ &\quad + 2u'_3g_{13}k_0 \\ &= 2(u'_1(\lambda_{11} - k_i g_{11}) + u'_2(\lambda_{12} - k_i g_{12}) + u'_3(\lambda_{13} - k_i g_{13})) = 0. \end{aligned}$$

O que implica que

$$u'_1(\lambda_{11} - k_i g_{11}) + u'_2(\lambda_{12} - k_i g_{12}) + u'_3(\lambda_{13} - k_i g_{13}) = 0.$$

Analogamente, provamos as outras linhas.

Agora, vamos mostrar que se  $w$  satisfaz 1.7, então  $w$  é uma direção principal e  $k_n(u'_1, u'_2, u'_3) = k_0$ .

Como por hipótese, temos que

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} - k_i g_{11} & \lambda_{12} - k_i g_{12} & \lambda_{13} - k_i g_{13} \\ \lambda_{12} - k_i g_{12} & \lambda_{22} - k_i g_{22} & \lambda_{23} - k_i g_{23} \\ \lambda_{13} - k_i g_{13} & \lambda_{23} - k_i g_{23} & \lambda_{33} - k_i g_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

podemos tomar  $(u'_1, u'_2, u'_3) \neq 0$ .

Multiplicando a primeira linha do sistema 1.7 por  $du_1$ , a segunda  $du_2$  e a terceira por  $du_3$ , temos que

$$\begin{aligned}(\lambda_{11} - k_i g_{11})(du_1)^2 + (\lambda_{12} - k_i g_{12})du_1 du_2 + (\lambda_{13} - k_i g_{13})du_1 du_3 &= 0 \\(\lambda_{12} - k_i g_{12})du_1 du_2 + (\lambda_{22} - k_i g_{22})(du_2)^2 + (\lambda_{23} - k_i g_{23})du_2 du_3 &= 0 \\(\lambda_{13} - k_i g_{13})du_1 du_3 + (\lambda_{23} - k_i g_{23})du_2 du_3 + (\lambda_{33} - k_i g_{33})(du_3)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Somando as equações acima temos

$$\begin{aligned}(\lambda_{11} - k_i g_{11})(du_1)^2 + (\lambda_{22} - k_i g_{22})(du_2)^2 + (\lambda_{33} - k_i g_{33})(du_3)^2 \\+ 2(\lambda_{12} - k_i g_{12})du_1 du_2 + 2(\lambda_{13} - k_i g_{13})du_1 du_3 + 2(\lambda_{23} - k_i g_{23})du_2 du_3 = 0\end{aligned}$$

Colocando  $k_0$  em evidência, temos

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{11}(du_1)^2 + \lambda_{22}(du_2)^2 + \lambda_{33}(du_3)^2 + 2\lambda_{12}du_1 du_2 + 2\lambda_{13}du_1 du_3 + 2\lambda_{23}du_2 du_3}{g_{11}(du_1)^2 + g_{22}(du_2)^2 + g_{33}(du_3)^2 + 2g_{12}du_1 du_2 + 2g_{13}du_1 du_3 + 2g_{23}du_2 du_3} \\= \frac{\lambda_{11}(u'_1)^2 + \lambda_{22}(u'_2)^2 + \lambda_{33}(u'_3)^2 + 2\lambda_{12}u'_1 u'_2 + 2\lambda_{13}u'_1 u'_3 + 2\lambda_{23}u'_2 u'_3}{g_{11}(u'_1)^2 + g_{22}(u'_2)^2 + g_{33}(u'_3)^2 + 2g_{12}u'_1 u'_2 + 2g_{13}u'_1 u'_3 + 2g_{23}u'_2 u'_3} \\= k_0 = k_n(u'_1, u'_2, u'_3),\end{aligned}$$

disto temos que  $w$  é uma direção principal. ■

## 1.2 O mapa de Poincaré

Seja  $C = \{\alpha \circ c(u_1); 0 \leq u_1 \leq L\}$  um ciclo principal de  $\alpha(M^3)$  de comprimento  $L$  do campo de linhas de curvatura principal  $\mathcal{L}_i(\alpha)$ .

**Definição 1.21** (*Seção transversal*) Uma aplicação diferenciável  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \alpha(M^3)$  de classe  $C^r$  chama-se seção transversal a  $\mathcal{L}_i(\alpha)$  (de classe  $C^r$ ) quando, para todo  $a \in A$ ,  $Df(a)(\mathbb{R}^2)$  e  $e_i(u_1)$  geram um espaço de dimensão três, sendo  $e_i(u_1)$  a direção principal no ponto  $f(a)$  associado a  $\mathcal{L}_i(\alpha)$ . Seja  $\Sigma = f(A)$  munido da topologia induzida. Se  $f : A \rightarrow \Sigma$  for um homeomorfismo, diz-se que  $\Sigma$  é uma seção transversal de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$ .

**Definição 1.22** (*A Aplicação de Poincaré*) Sejam  $p \in C$ ,  $V$  uma vizinhança de  $p$  e  $\Sigma$  uma seção transversal de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$  em  $p$ . A Aplicação de Poincaré  $\Pi : V \cap \Sigma \rightarrow \Sigma$  é tal que  $\Pi(q)$  é o primeiro ponto onde a linha de curvatura  $a$  que  $q$  pertence  $\phi(t, q)$ , partindo de  $q$ , intercepta novamente a seção  $\Sigma$ .

Vamos mostrar que a Aplicação de Poincaré está bem definida. Para isso, devemos garantir que para  $q$  próximo a  $p$ ,  $\phi(t, q)$  volte a interceptar  $\Sigma$ . Isso é garantido pela continuidade das linhas de curvatura de  $\mathcal{L}$ , pois para todo ponto  $q \in V \cap \Sigma$  próximo de  $p$  a linha de curvatura  $\phi(t, q)$  permanece próxima  $C$ , com  $t$  em um intervalo compacto pré-fixado. Deve-se garantir ainda que existe uma seção transversal de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$  em  $p \in C$ . Isso é provado na proposição abaixo.

**Proposição 1.23** *Seja  $p \in \alpha(M^3)$  um ponto regular de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$ . Existe pelo menos uma seção transversal de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$  passando por  $p$ .*

**Demonstração:** De fato, como  $p$  é regular, então  $e_i(u_1) = \mathcal{L}_i(\alpha)(p)$  é não nulo, o que significa que existem  $v_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2$ , tal que  $\{v_1, v_2, e_1(u_1)\}$  é linearmente independente.

Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por  $T(x_1, x_2) = x_1 v_1 + x_2 v_2$ .

Afirmção 1:  $T$  é linear.

De fato, sejam  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , então

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) + \lambda T(y_1, y_2) &= (x_1 v_1 + x_2 v_2) + \lambda(y_1 v_1 + y_2 v_2) \\ &= (x_1 + \lambda y_1) v_1 + (x_2 + \lambda y_2) v_2 \\ &= T(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2) \end{aligned}$$

Afirmção 2:  $T$  é injetiva.

De fato, tome  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $T(x_1, x_2) = T(y_1, y_2)$ , disto temos que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = y_1 v_1 + y_2 v_2,$$

o que implica que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 - y_1 v_1 - y_2 v_2 = 0,$$

segue que

$$(x_1 - y_1) v_1 + (x_2 - y_2) v_2 = 0$$

e portanto  $x_i - y_i = 0$  para todo  $i$ , pois os  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , são linearmente independentes. Logo  $T$  é injetiva.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, ver [1], temos que  $U = T(\mathbb{R}^2)$  é um espaço vetorial de dimensão dois, logo existe uma bijeção linear  $Q : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $U$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Defina  $g : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por  $g(x_1, x_2) = p + T(x_1, x_2)$ . Como  $g$  é diferenciável, logo é contínua. E sendo  $g^{-1}|_U$ , dada por  $g^{-1}|_U(v) = Q(p - v)$  que também é contínua, temos que  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow U$  é um homeomorfismo.

Como  $\alpha(M^3)$  é aberto, temos que existe uma vizinhança  $V$  de  $p$ , tal que  $V \subset \alpha(M^3)$ . Como  $g$  é contínua, temos que  $g^{-1}(V)$  é aberto e sendo

$g(0) = p$ , temos que  $g^{-1}(V)$  é uma vizinhança do 0, logo existe  $\delta > 0$  tal que  $B(0, \delta) \subset g^{-1}(V)$ , ou seja,  $g(B(0, \delta)) \subset V \subset \alpha(M^3)$ . Defina  $f = g|_{B(0, \delta)}$ .

Como  $f$  é uma restrição de  $g$ , temos que  $f$  é diferenciável e um homeomorfismo sobre sua imagem. E como,  $f(0) = p$  e seja  $v \in \mathbb{R}^2$ , temos que  $Df(v) = D(p + T(v)) = DT(v) = T(v)$ . Assim, a matriz jacobiana de  $Df(v)$  é a matriz  $4 \times 2$ , cujas colunas são os vetores  $v_1$  e  $v_2$ , ou seja,

$$[Df(v)] = [v_1 \ v_2].$$

Daí temos que  $f$  é uma seção transversal local de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$  em  $p$  e sendo  $f$  um homeomorfismo sobre sua imagem, temos que  $\Sigma = f(B(0, \delta))$  é uma seção transversal de  $\mathcal{L}_i(\alpha)$ . ■

**Proposição 1.24** *A Aplicação de Poincaré é um difeomorfismo de classe  $C^{k-2}$ .*

**Demonstração:** O corolário do Teorema do Fluxo Tubular, ver [9], garante a existência de uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^4$  e um difeomorfismo  $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\tau(V \cap \Sigma) = 0$ , sendo  $\tau(q)$  é o tempo que  $\phi(t, q)$  leva para interceptar  $\Sigma$ . Então podemos definir

$$\Pi(q) = \phi(T + \tau(\phi(T, q)), q).$$

Como  $\phi(s, q)$  satisfaz a equação de Rodrigues  $N'(s) = \lambda_i(s)\phi(s, q)$  e  $N$  é de classe  $C^{k-1}$ , temos que  $\phi$  e  $\tau$  são de classe  $C^{k-2}$ .

Disto, vemos que  $\Pi$  é a composição de funções de classe  $C^{k-2}$ , logo é de classe  $C^{k-2}$ . A inversa  $\Pi^{-1} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$  também é de classe  $C^{k-2}$  e mostramos de modo análogo tomando o campo  $-\mathcal{L}_1(\alpha)$ . Portanto,  $\Pi$  é um difeomorfismo  $C^{k-2}$ . ■

### 1.3 Equações de Darboux para um ciclo principal

**Proposição 1.25** *As equações de Darboux para a curva  $\alpha \circ c$  são dadas pelo seguinte sistema*

$$\begin{pmatrix} e'_1(u_1) \\ e'_2(u_1) \\ e'_3(u_1) \\ N'(u_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & k_1 \\ -w_{12} & 0 & w_{23} & 0 \\ -w_{13} & -w_{23} & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(u_1) \\ e_2(u_1) \\ e_3(u_1) \\ N(u_1) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

onde  $w_{ij} = \langle \nabla_{e_1} e_i, e_j \rangle$ .

**Demonstração:** Queremos mostrar que

$$\langle e'_1(u_1), e_1(u_1) \rangle = \langle e'_2(u_1), e_2(u_1) \rangle = \langle e'_3(u_1), e_3(u_1) \rangle = \langle N'(u_1), N(u_1) \rangle = 0 \quad (1.9)$$

$$k_1 = \langle e'_1(u_1), N(u_1) \rangle = -\langle N'(u_1), e_1(u_1) \rangle \quad (1.10)$$

$$\langle e'_2(u_1), N(u_1) \rangle = \langle e_2(u_1), N'(u_1) \rangle = 0 \quad (1.11)$$

$$\langle e'_3(u_1), N(u_1) \rangle = \langle e_3(u_1), N'(u_1) \rangle = 0 \quad (1.12)$$

$$w_{12} = \langle e'_1(u_1), e_2(u_1) \rangle = -\langle e'_2(u_1), e_1(u_1) \rangle, \quad (1.13)$$

$$w_{13} = \langle e'_1(u_1), e_3(u_1) \rangle = -\langle e'_3(u_1), e_1(u_1) \rangle \quad (1.14)$$

$$w_{23} = \langle e'_2(u_1), e_3(u_1) \rangle = -\langle e'_3(u_1), e_2(u_1) \rangle \quad (1.15)$$

Temos que  $\langle e_1(u_1), e_1(u_1) \rangle = 1$ , derivando em relação a  $u_1$ , temos  $2\langle e'_1(u_1), e_1(u_1) \rangle = 0$ , logo  $\langle e'_1(u_1), e_1(u_1) \rangle = 0$ . Da mesma forma mostramos que  $\langle e'_2(u_1), e_2(u_1) \rangle = \langle e'_3(u_1), e_3(u_1) \rangle = \langle N'(u_1), N(u_1) \rangle = 0$ , provando assim (1.9).

Agora, temos que

$$-\langle e_1(u_1), N'(u_1) \rangle = -\langle e_1(u_1), -k_1(u_1)e_1(u_1) \rangle = k_1(u_1)$$

e sabemos que  $\langle e_1(u_1), N(u_1) \rangle = 0$ , o que implica

$$\langle e'_1(u_1), N(u_1) \rangle + \langle e_1(u_1), N'(u_1) \rangle = 0,$$

logo

$$\langle e'_1(u_1), N(u_1) \rangle = -\langle e_1(u_1), N'(u_1) \rangle,$$

provando assim (1.10).

Note que

$$\langle N'(u_1), e_2(u_1) \rangle = \langle k_1(u_1)e_1(u_1), e_2(u_1) \rangle = k_1(u_1)\langle e_1(u_1), e_2(u_1) \rangle = 0$$

e sabemos que  $\langle e_2(u_1), N(u_1) \rangle = 0$ , o que implica

$$\langle e'_2(u_1), N(u_1) \rangle + \langle e_2(u_1), N'(u_1) \rangle = 0,$$

portanto

$$\langle e'_2(u_1), N(u_1) \rangle = -\langle e_2(u_1), N'(u_1) \rangle.$$

Do mesmo modo mostramos que  $\langle e'_3(u_1), N(u_1) \rangle = \langle e_3(u_1), N'(u_1) \rangle = 0$ , provando assim (1.11) e (1.12).

Note que se mostrarmos que  $\nabla_{e_1(u_1)}e_1(u_1) = e'_1(u_1)$ , teremos que

$$\langle e'_1(u_1), e_2(u_1) \rangle = \langle \nabla_{e_1(u_1)}e_1(u_1), e_2(u_1) \rangle = w_{12}.$$

Seja  $e_1(u_1) = \sum_i f_i v_i$ , onde  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é a base canônica do  $\mathbb{R}^4$ , assim

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1(u_1)} e_1(u_1) &= \nabla_{\sum_i f_i v_i} \sum_j f_j v_j \\ &= \sum_i f_i \nabla_{v_i} \sum_j f_j v_j \\ &= \sum_i f_i \sum_j \nabla_{v_i} f_j v_j \\ &= \sum_i f_i \sum_j (f_j \nabla_{v_i} v_j + v_i(f_j) v_j)\end{aligned}$$

visto que  $\nabla_{v_i} v_j = 0, \forall i, j = 1, 2$ , temos

$$\nabla_{e_1(u_1)} e_1(u_1) = \sum_{i,j} f_i v_i (f_j) v_j = \sum_j e_1(f_j) u_j = \sum_j f'_j u_j = e'_1(u_1).$$

E como  $\langle e_1(u_1), e_2(u_1) \rangle = 0$ , temos que

$$\langle e'_1(u_1), e_2(u_1) \rangle + \langle e_1(u_1), e'_2(u_1) \rangle = 0,$$

logo

$$\langle e'_1(u_1), e_2(u_1) \rangle = -\langle e_1(u_1), e'_2(u_1) \rangle.$$

De modo análogo, mostramos que

$$w_{13} = \langle e'_1(u_1), e_3(u_1) \rangle = -\langle e'_3(u_1), e_1(u_1) \rangle$$

e  $w_{23} = \langle e'_2(u_1), e_3(u_1) \rangle = \langle e'_3(u_1), e_2(u_1) \rangle$ , provando assim (1.13), (1.14) e (1.15).

■



## Capítulo 2

# Coordenadas em torno de Ciclos Principais

Seja  $\alpha \in \mathcal{J}^{\infty, r}$  e  $c$  um ciclo principal (folha compacta) de  $\mathcal{F}_i(\alpha)$ . A fim de fixar notação vamos supor  $i = 1$ .

Suponha que  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \alpha(M^3)$  uma parametrização pelo comprimento de arco  $u_1$  de  $c$ ,  $c(u_1) = c(u_1 + L)$ , onde  $L$  é o comprimento de arco de  $c$ .

Denote por  $e_1(u_1) = D\alpha(c(u_1))(c'(u_1))$  o vetor tangente da curva  $\alpha \circ c$  e por  $e_2(u_1)$ ,  $e_3(u_1)$  os vetores tangentes unitários das linhas de curvaturas principais correspondentes às folheações  $\mathcal{F}_2(\alpha)$  e  $\mathcal{F}_3(\alpha)$  e tal que  $N_\alpha(u_1) = (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)(u_1)$  é a normal positiva à  $\alpha$  no ponto  $c(u_1) \equiv \alpha(c(u_1))$ .

**Lemma 2.1** *Seja  $c$  um ciclo principal da folheação  $\mathcal{F}_1(\alpha)$ . Então a expressão*

$$\begin{aligned} \alpha(u_1, u_2, u_3) &= (\alpha \circ c)(u_1) + u_2 e_2(u_1) + u_3 e_3(u_1) \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2} k_2(u_1) u_2^2 + \frac{1}{2} k_3(u_1) u_3^2 + A(u_1, u_2, u_3) \right] N_\alpha(u_1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $A(u_1, 0, 0) = 0$  e

$$\begin{aligned} A(u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{6} a(u_1) u_2^3 + \frac{1}{2} b(u_1) u_2 u_3^2 + \frac{1}{2} d(u_1) u_2^2 u_3 \\ &\quad + \frac{1}{6} c(u_1) u_3^3 + O[(u_2^2 + u_3^2)^2], \end{aligned}$$

define uma carta de classe  $C^\infty$  na vizinhança de  $c$ .

**Demonstração:** Defina  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , dada por

$$g(u_1, u_2, u_3, w) = (\alpha \circ c)(u_1) + u_2 e_2(u_1) + u_3 e_3(u_1) + w N_\alpha(u_1).$$

Note que

$$g(u_1, 0, 0, 0) = (\alpha \circ c)(u_1).$$

Temos que

$$[Dg(u_1, 0, 0, 0)] = [e_1(u_1) \ e_2(u_1) \ e_3(u_1) \ N_\alpha(u_1)].$$

Como  $\{e_1(u_1), e_2(u_1), e_3(u_1), N_\alpha(u_1)\}$  é uma base do  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\det(Dg(u_1, 0, 0, 0)) \neq 0.$$

Disto temos pelo Teorema da Função Inversa, ver [8], que  $g$  é um difeomorfismo local.

Observe que no  $\mathbb{R}^4$ , o hiperplano gerado por  $[e_2, e_3, N_\alpha]$  intersecta  $\alpha(M^3)$  transversalmente. Essa intersecção é uma superfície regular tangente ao plano gerado por  $[e_2, e_3]$ . De fato, seja  $H$  o hiperplano gerado por  $[e_2(u_1), e_3(u_1), N_\alpha(u_1)]$ , isto é,

$$H = \{ae_2(u_1) + be_3(u_1) + cN_\alpha(u_1); a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Note que  $H$  é um subespaço do  $\mathbb{R}^4$  de dimensão três, cujo o plano tangente é o próprio  $H$ . Temos que  $T_p\alpha(M^3) = [e_1(u_1), e_2(u_1), e_3(u_1)]$ . Assim,  $T_pH \cap T_p\alpha(M^3) = [e_2(u_1), e_3(u_1)]$ .

Tome  $S = H \cap \alpha(M^3)$ . Note que  $T_pS = [e_2(u_1), e_3(u_1)]$ , logo  $S$  é uma superfície regular.

Se fixarmos um  $u_1$  teremos a aplicação identidade na base  $\{e_2(0), e_3(0), N_\alpha(0)\}$  com origem em  $\alpha(c(u_1))$  e sendo  $g$  ser um difeomorfismo local podemos escrever  $w$  em função de  $u_2$  e  $u_3$ , ou seja,  $w = h(u_2, u_3)$ . Assim, podemos parametrizar  $S$  com  $X : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(u_2, u_3) = (u_2, u_3, h(u_2, u_3)),$$

sendo que  $V$  é uma vizinhança do  $(0, 0)$ . Tal parametrização é chamada carta de Monge.

Disto, temos que  $\alpha : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por

$$\alpha(u_1, u_2, u_3) = (\alpha \circ c)(u_1) + u_2e_2(u_1) + u_3e_3(u_1) + h(u_2, u_3)(u_1)N_\alpha(u_1).$$

Usaremos a carta de monge de  $S$  para encontrarmos o desenvolvimento da série de Taylor da função  $h$ , que é dada por

$$h(u_2, u_3) = a_{00} + a_{01}u_2 + a_{02}u_3 + a_{11}u_2^2 + a_{12}u_2u_3 + a_{22}u_3^2 + A(u_2, u_3).$$

Vamos encontrar os termos  $a_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ .

O termo  $a_{00} = h(0, 0)$  e como  $\alpha(u_1, 0, 0) = (\alpha \circ c)(u_1)$ , então  $h(0, 0) = 0$ . Assim,

$$h(u_2, u_3) = a_{01}u_2 + a_{02}u_3 + a_{11}u_2^2 + a_{12}u_2u_3 + a_{22}u_3^2 + A(u_2, u_3).$$

Agora temos que  $a_{01} = \frac{\partial}{\partial u_2}h(0, 0)$ , por outro lado, note que

$$\frac{\partial}{\partial u_2}h(0, 0) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_2}X(0, 0), \vec{k} \right\rangle.$$

Porém,  $\frac{\partial X}{\partial u_2}(0, 0) = \vec{i}$ , daí, temos que

$$a_{01} = \frac{\partial}{\partial u_2}h(0, 0) = 0.$$

De igual modo, temos que

$$a_{02} = \frac{\partial}{\partial u_3}h(u_2, u_3) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_3}X(u_2, u_3), \vec{k} \right\rangle = \left\langle \vec{j}, \vec{k} \right\rangle = 0.$$

Daí,

$$h(u_2, u_3) = a_{11}u_2^2 + a_{12}u_2u_3 + a_{22}u_3^2 + A(u_2, u_3).$$

Para encontrarmos o valor de  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  e  $a_{22}$ , vamos calcular a matriz da derivada da normal de  $X$ ,  $D\hat{N}$ , na base de autovetores. Primeiro, vamos calcular  $\hat{N}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} X_1(u_2, u_3) &= (1, 0, h_1(u_2, u_3)) \\ X_2(u_2, u_3) &= (0, 1, h_2(u_2, u_3)), \end{aligned}$$

onde  $X_i(u_2, u_3) = \frac{\partial}{\partial u_i}X(u_2, u_3)$  e  $h_i(u_2, u_3) = \frac{\partial}{\partial u_i}h(u_2, u_3)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Então

$$X_1(u_2, u_3) \times X_2(u_2, u_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & h_1(u_2, u_3) \\ 0 & 1 & h_2(u_2, u_3) \end{vmatrix} = (-h_1(u_2, u_3), h_2(u_2, u_3), 1)$$

$$|X_1(u_2, u_3) \times X_2(u_2, u_3)| = \sqrt{(h_1^2(u_2, u_3) + h_2^2(u_2, u_3) + 1)}.$$

Daí,

$$\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{(h_1^2(u_2, u_3) + h_2^2(u_2, u_3) + 1)}}(-h_1(u_2, u_3), h_2(u_2, u_3), 1).$$

A matriz de  $D\hat{N}$  na base de autovetores é dada por

$$D\hat{N}_{(u_2, u_3)} = \begin{pmatrix} b_{11}(u_2, u_3) & b_{12}(u_2, u_3) \\ b_{21}(u_2, u_3) & b_{22}(u_2, u_3) \end{pmatrix},$$

sendo  $b_{11}(u_2, u_3) = \frac{fF-eG}{EG-F^2}(u_2, u_3)$ ,  $b_{12}(u_2, u_3) = \frac{gF-fG}{EG-F^2}(u_2, u_3)$ ,  $b_{21}(u_2, u_3) = \frac{eF-fE}{EG-F^2}(u_2, u_3)$  e  $b_{22}(u_2, u_3) = \frac{fF-gE}{EG-F^2}(u_2, u_3)$ .

Vamos calcular os coeficientes da primeira e segunda forma de  $X$ .

$$\begin{aligned} E(u_2, u_3) &= \langle X_1(u_2, u_3), X_1(u_2, u_3) \rangle = \langle (1, 0, h_1(u_2, u_3)), (1, 0, h_1(u_2, u_3)) \rangle \\ &= 1 + [h_1(u_2, u_3)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(u_2, u_3) &= \langle X_1(u_2, u_3), X_2(u_2, u_3) \rangle = \langle (1, 0, h_1(u_2, u_3)), (0, 1, h_2(u_2, u_3)) \rangle \\ &= h_1(u_2, u_3)h_2(u_2, u_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(u_2, u_3) &= \langle X_2(u_2, u_3), X_2(u_2, u_3) \rangle = \langle (0, 1, h_2(u_2, u_3)), (0, 1, h_2(u_2, u_3)) \rangle \\ &= 1 + [h_2(u_2, u_3)]^2 \end{aligned}$$

$$X_{11}(u_2, u_3) = (0, 0, h_{11}(u_2, u_3))$$

$$X_{12}(u_2, u_3) = (0, 0, h_{12}(u_2, u_3))$$

$$X_{22}(u_2, u_3) = (0, 0, h_{22}(u_2, u_3)),$$

então

$$\begin{aligned} e(u_2, u_3) &= \langle X_{11}(u_2, u_3), \hat{N}(u_2, u_3) \rangle \\ &= \frac{1}{\Gamma} \langle (0, 0, h_{11}(u_2, u_3)), (-h_1(u_2, u_3), h_2(u_2, u_3), 1) \rangle \\ &= \frac{h_{11}(u_2, u_3)}{\sqrt{(h_1^2(u_2, u_3) + h_2^2(u_2, u_3) + 1)}} \\ f(u_2, u_3) &= \langle X_{12}(u_2, u_3), \hat{N}(u_2, u_3) \rangle \\ &= \frac{1}{\Gamma} \langle (0, 0, h_{12}(u_2, u_3)), (-h_1(u_2, u_3), h_2(u_2, u_3), 1) \rangle \\ &= \frac{h_{12}(u_2, u_3)}{\sqrt{(h_1^2(u_2, u_3) + h_2^2(u_2, u_3) + 1)}} \\ g(u_2, u_3) &= \langle X_{22}(u_2, u_3), \hat{N}(u_2, u_3) \rangle \\ &= \frac{1}{\Gamma} \langle (0, 0, h_{22}(u_2, u_3)), (-h_1(u_2, u_3), h_2(u_2, u_3), 1) \rangle \\ &= \frac{h_{22}(u_2, u_3)}{\sqrt{(h_1^2(u_2, u_3) + h_2^2(u_2, u_3) + 1)}}, \end{aligned}$$

sendo  $\Gamma = \sqrt{(h_1^2(u_2, u_3) + h_2^2(u_2, u_3) + 1)}$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
(EG - F^2)(u_2, u_3) &= (1 + h_1^2(u_2, u_3))(1 + h_2^2(u_2, u_3)) - (h_1(u_2, u_3)h_2(u_2, u_3))^2 \\
&= 1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3) + (h_1(u_2, u_3)h_2(u_2, u_3))^2 \\
&\quad - (h_1(u_2, u_3)h_2(u_2, u_3))^2 \\
&= 1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3) \\
(fF - eG)(u_2, u_3) &= \frac{(h_{12}h_1h_2)(u_2, u_3)}{1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3)} - \frac{h_{11}(u_2, u_3)(1 + h_2^2(u_2, u_3))}{1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3)} \\
(gF - fG)(u_2, u_3) &= \frac{(h_{22}h_1h_2)(u_2, u_3)}{1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3)} - \frac{h_12(u_2, u_3)(1 + h_2^2(u_2, u_3))}{1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3)} \\
(eF - fE)(u_2, u_3) &= \frac{(h_{11}h_1h_2)(u_2, u_3)}{1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3)} - \frac{h_12(u_2, u_3)(1 + h_1^2(u_2, u_3))}{1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3)} \\
(fF - gE)(u_2, u_3) &= \frac{(h_{12}h_1h_2)(u_2, u_3)}{1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3)} - \frac{h_22(u_2, u_3)(1 + h_1^2(u_2, u_3))}{1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3)},
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
b_{11}(u_2, u_3) &= \frac{(h_{12}h_1h_2)(u_2, u_3) - h_{11}(u_2, u_3) - (h_{11}h_2^2)(u_2, u_3)}{(1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3))^2} \\
b_{12}(u_2, u_3) &= \frac{(h_{22}h_1h_2)(u_2, u_3) - h_{12}(u_2, u_3) - (h_{12}h_2^2)(u_2, u_3)}{(1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3))^2} \\
b_{21}(u_2, u_3) &= \frac{(h_{11}h_1h_2)(u_2, u_3) - h_{12}(u_2, u_3) - (h_{12}h_1^2)(u_2, u_3)}{(1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3))^2} \\
b_{22}(u_2, u_3) &= \frac{(h_{12}h_1h_2)(u_2, u_3) - h_{22}(u_2, u_3) - (h_{22}h_1^2)(u_2, u_3)}{(1 + h_2^2(u_2, u_3) + h_1^2(u_2, u_3))^2}.
\end{aligned}$$

Como  $h_1(0, 0) = h_2(0, 0) = 0$ , temos que  $b_{11}(0, 0) = -h_{11}(0, 0)$ ,  $b_{12}(0, 0) = -h_{12}(0, 0)$ ,  $b_{21}(0, 0) = -h_{12}(0, 0)$ ,  $b_{22}(0, 0) = -h_{22}(0, 0)$ .

Como  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  são as direções principais de  $X$  em  $(0, 0)$  e

$$D\hat{N}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -k_2(0, 0) & 0 \\ 0 & -k_3(0, 0) \end{pmatrix}$$

e vimos que

$$D\hat{N}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -h_{11}(0, 0) & -h_{12}(0, 0) \\ -h_{12}(0, 0) & -h_{22}(0, 0) \end{pmatrix}.$$

Disto temos que  $h_{11}(0, 0) = k_2(0, 0)$ ,  $h_{22}(0, 0) = k_3(0, 0)$  e  $h_{12}(0, 0) = h_{21}(0, 0) = 0$  e sendo  $a_{11}(u_2, u_3) = \frac{h_{11}(u_2, u_3)}{2}$ ,  $a_{12}(u_2, u_3) = \frac{h_{12}(u_2, u_3)}{2}$  e  $a_{22}(u_2, u_3) = \frac{h_{22}(u_2, u_3)}{2}$ , temos que

$$h(u_2, u_3) = \frac{k_2(u_1, 0, 0)}{2}u_2 + \frac{k_3(u_1, 0, 0)}{2}u_3 + A(u_1, u_2, u_3).$$

Sabemos que  $A(u_2, u_3) = \frac{1}{6}Dh^3(0, 0)(u_2, u_3)^3 + O(4)$ . Sendo

$$\begin{aligned}
D^3h(0, 0)(u_2, u_3)^3 &= \sum \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h(0, 0) u_{i+1} u_{j+1} u_{k+1} \\
&= h_{111}(u_2, u_3) u_2^3 + h_{112}(u_2, u_3) u_2^2 u_3 + h_{121}(u_2, u_3) u_2^2 u_3 \\
&\quad + h_{122}(u_2, u_3) u_2 u_3^2 + h_{211}(u_2, u_3) u_2^2 u_3 + h_{212}(u_2, u_3) u_2 u_3^2 \\
&\quad + h_{221}(u_2, u_3) u_2 u_3^2 + h_{222}(u_2, u_3) u_3^3 \\
&= h_{111}(u_2, u_3) u_2^3 + 3h_{112}(u_2, u_3) u_2^2 u_3 + 3h_{122}(u_2, u_3) u_2 u_3^2 \\
&\quad + h_{222}(u_2, u_3) u_3^3.
\end{aligned}$$

Queremos mostrar que

$$\begin{aligned}
h_{111}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial u_2} k_2(u_1, 0, 0), \\
h_{122}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial u_2} k_3(u_1, 0, 0), \\
h_{112}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial u_3} k_2(u_1, 0, 0) \\
h_{222}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial u_3} k_3(u_1, 0, 0).
\end{aligned}$$

Note que  $D\hat{N} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , então

$$\frac{\partial}{\partial u_2} D\hat{N}_{(u_2, u_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_2} k_2(u_2, u_3) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial u_2} k_3(u_2, u_3) \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_3} D\hat{N}_{(u_2, u_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_3} k_2(u_2, u_3) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial u_3} k_3(u_2, u_3) \end{pmatrix},$$

por outro lado

$$\frac{\partial}{\partial u_2} D\hat{N}_{(u_2, u_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_2} b_{11}(u_2, u_3) & \frac{\partial}{\partial u_2} b_{12}(u_2, u_3) \\ \frac{\partial}{\partial u_2} b_{21}(u_2, u_3) & \frac{\partial}{\partial u_2} b_{22}(u_2, u_3) \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial u_3} D\hat{N}_{(u_2, u_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_3} b_{11}(u_2, u_3) & \frac{\partial}{\partial u_3} b_{12}(u_2, u_3) \\ \frac{\partial}{\partial u_3} b_{21}(u_2, u_3) & \frac{\partial}{\partial u_3} b_{22}(u_2, u_3) \end{pmatrix}.$$

Disto temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_2}k_2(u_2, u_3) &= \frac{\partial}{\partial u_2}b_{11}(u_2, u_3), \\ \frac{\partial}{\partial u_2}k_3(u_2, u_3) &= \frac{\partial}{\partial u_2}b_{22}(u_2, u_3), \\ \frac{\partial}{\partial u_3}k_2(u_2, u_3) &= \frac{\partial}{\partial u_3}b_{11}(u_2, u_3)e \\ \frac{\partial}{\partial u_3}k_3(u_2, u_3) &= \frac{\partial}{\partial u_3}b_{22}(u_2, u_3).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_2}b_{11}(u_2, u_3) &= \\ &\left[ \frac{h_{112}h_1h_2 + h_{12}h_{11}h_2 + h_{12}h_1h_{12} - h_{111} - h_{111}h_2^2 - 2h_{11}h_2h_{12}}{(1 + h_2^2 + h_1^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2[h_{12}h_1h_2 - h_{11} - h_{11}h_2^2][2h_2h_{12} + 2h_1h_{11}]}{(1 + h_2^2 + h_1^2)^2} \right] (u_2, u_3) \\ \frac{\partial}{\partial u_2}b_{22}(u_2, u_3) &= \\ &\left[ \frac{h_{122}h_1h_2 + h_{12}h_{12}h_2 + h_{12}h_1h_{22} - h_{222} - h_{222}h_1^2 - 2h_{22}h_1h_{12}}{(1 + h_2^2 + h_1^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2[h_{12}h_1h_2 - h_{22} - h_{22}h_1^2][2h_2h_{22} + 2h_1h_{12}]}{(1 + h_2^2 + h_1^2)^2} \right] (u_2, u_3) \\ \frac{\partial}{\partial u_3}b_{11}(u_2, u_3) &= \\ &\left[ \frac{h_{122}h_1h_2 + h_{12}h_{12}h_2 + h_{12}h_1h_{22} - h_{112} - h_{112}h_2^2 - 2h_{11}h_2h_{22}}{(1 + h_2^2 + h_1^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{-2[h_{12}h_1h_2 - h_{11} - h_{11}h_2^2][2h_2h_{22} + 2h_1h_{12}]}{(1 + h_2^2 + h_1^2)^2} \right] (u_2, u_3) \\ \frac{\partial}{\partial u_2}b_{22}(u_2, u_3) &= \\ &\left[ \frac{h_{112}h_1h_2 + h_{12}h_{11}h_2 + h_{12}h_1h_{12} - h_{221} - h_{221}h_2^2 - 2h_{22}h_1h_{11}}{(1 + h_2^2 + h_1^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{-2[h_{12}h_1h_2 - h_{22} - h_{22}h_1^2][2h_2h_{22} + 2h_1h_{12}]}{(1 + h_2^2 + h_1^2)^2} \right] (u_2, u_3).\end{aligned}$$

Como  $h_1(0, 0) = h_2(0, 0) = 0$ , temos que  $\frac{\partial}{\partial u_2}b_{11}(0, 0) = -h_{111}(0, 0)$ ,

$\frac{\partial}{\partial u_3} b_{22}(0,0) = -h_{222}(0,0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial u_3} b_{11}(0,0) = -h_{112}(0,0)$  e  $\frac{\partial}{\partial u_2} b_{22}(0,0) = -h_{112}(0,0)$ . Disto temos o que queríamos.

■

## 2.1 Primeira e segunda forma fundamentais

No que se segue vamos calcular os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de  $\alpha$  na vizinhança de  $c$ , na carta  $(u_1, u_2, u_3)$  dado pelo lema 2.1.

Dados  $\alpha \in \mathcal{J}^{\infty,r}$  e  $(u_1, u_2, u_3)$  as coordenadas dadas pelo lema 2.1, as seguintes notações serão usadas:  $w'_{i,j} = \frac{dw_{ij}}{du_1}$ ,  $A_i = \frac{\partial A}{\partial u_i}$ ,  $\alpha_i = \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}$ ,  $\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}$ ,  $g_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$  e  $\lambda_{ij} = \langle \alpha_{ij}, N \rangle$ .

As funções  $g_{ij}$  e  $\lambda_{ij}$  são respectivamente os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de  $\alpha$ , expressa nas coordenadas  $(u_1, u_2, u_3)$ .

Diferenciando a equação (2.1) em relação a  $u_1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha_1(u_1, u_2, u_3) = & D(\alpha)(c(u_1))c'(u_1) + u_2 e'_2(u_1) + u_3 e'_3(u_1) + \left( \frac{1}{2} k'_2(u_1) u_2^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} k'_3(u_1) u_3^2 + \frac{1}{6} a'(u_1) u_2^3 + \frac{1}{2} b'(u_1) u_2 u_3^2 + \frac{1}{2} d'(u_1) u_2^2 u_3 \\ & + \left. \frac{1}{6} c'(u_1) u_3^3 \right) N_\alpha(u_1) + \left( \frac{1}{2} k_2(u_1) u_2^2 + \frac{1}{2} k_3(u_1) u_3^2 \right. \\ & + \frac{1}{6} a(u_1) u_2^3 + \frac{1}{2} b(u_1) u_2 u_3^2 + \frac{1}{2} d(u_1) u_2^2 u_3 + \left. \frac{1}{6} c(u_1) u_3^3 \right) \\ & N'_\alpha(u_1) \end{aligned}$$

usando as equações de Darboux 1.8, temos

$$\begin{aligned} \alpha_1(u_1, u_2, u_3) = & \left( 1 - u_2 w_{12}(u_1) - u_3 w_{13}(u_1) - \left( \frac{1}{2} k_2(u_1) u_2^2 + \frac{1}{2} k_3(u_1) u_3^2 \right. \right. \\ & + \frac{1}{6} a(u_1) u_2^3 + \frac{1}{2} b(u_1) u_2 u_3^2 + \frac{1}{2} d(u_1) u_2^2 u_3 + \left. \frac{1}{6} c(u_1) u_3^3 \right) \\ & k_1(u_1) e_1(u_1) + u_2 w_{23}(u_1) e_3(u_1) - u_3 w_{23}(u_1) e_2(u_1) \\ & + \left( \frac{1}{2} k'_2(u_1) u_2^2 + \frac{1}{2} k'_3(u_1) u_3^2 + \frac{1}{6} a'(u_1) u_2^3 + \frac{1}{2} b'(u_1) u_2 u_3^2 \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} d'(u_1) u_2^2 u_3 + \frac{1}{6} c'(u_1) u_3^3 \right) N_\alpha(u_1) \end{aligned}$$



Diferenciando a equação (2.1) em relação a  $u_2$  e a  $u_3$ , obtemos respectivamente

$$\begin{aligned}\alpha_2(u_1, u_2, u_3) &= e_2(u_1) + \left( k_2(u_1) u_2 + \frac{1}{2} a(u_1) u_2^2 + \frac{1}{2} b(u_1) u_3^2 \right. \\ &\quad \left. + d(u_1) u_2 u_3 + O(3) \right) N_\alpha(u_1) \\ \alpha_3(u_1, u_2, u_3) &= e_3(u_1) + \left( k_3(u_1) u_3 + b(u_1) u_2 u_3 + \frac{1}{2} d(u_1) u_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} c(u_1) u_3^2 + O(3) \right) N_\alpha(u_1)\end{aligned}$$

Diferenciando as três equações acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}(u_1, u_2, u_3) &= [- (w'_{12} + w_{13} w_{23}) u_2 + (-w'_{13} + w_{12} w_{23}) u_3 + O(2)] e_1 \\ &\quad + [w_{12} - w_{12}^2 u_2 - (w_{23} + w_{12} w_{13}) u_3 + O(2)] e_2 \\ &\quad + [w_{13} + (w'_{23} - w_{13} w_{12}) u_2 - (w_{23}^2 + w_{13}^2) u_3 + O(2)] e_3 \\ &\quad + [k_1 - w_{12} k_1 u_2 - w_{13} k_1 u_3 + O(2)] N, \\ \alpha_{12}(u_1, u_2, u_3) &= - [w_{12} + k_1 k_2 u_2 + k_1 A_2] e_1 + w_{23} e_3 + (k'_2 u_2 + A_{12}) N \\ \alpha_{13}(u_1, u_2, u_3) &= - [w_{13}(u_1) + k_1 k_3 u_3 + k_1 A_3] e_1(u_1) - w_{23} e_2 + (k'_3 u_3 + A_{13}) N \\ \alpha_{22}(u_1, u_2, u_3) &= (k_2 + a u_2 + d u_3 + O(2)) N \\ \alpha_{23}(u_1, u_2, u_3) &= (d u_2 + b u_3 + O(2)) N \\ \alpha_{33}(u_1, u_2, u_3) &= (k_3 + b u_2 + c u_3 + O(2)) N.\end{aligned}$$

Agora vamos encontrar o vetor unitário  $N$ ,

$$\begin{aligned}N(u_1, u_2, u_3) &= - \left[ \frac{1}{2} k'_2 u_2^2 + \frac{1}{2} k'_3 u_3^2 + O(3) \right] e_1 - \left[ k_2 u_2 + \frac{1}{2} a u_2^2 + d u_2 u_3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} b u_3^2 + O(3) \right] e_2 - \left[ k_3 u_3 + \frac{1}{2} d u_2^2 + b u_2 u_3 + \frac{1}{2} c u_3^2 + O(3) \right] \\ &\quad e_3 + \left[ 1 - \frac{1}{2} k_2^2 u_2^2 - \frac{1}{2} k_3^2 u_3^2 + O(3) \right] N\end{aligned}$$

E por fim vamos calcular os coeficientes da primeira e segunda forma,

$$\begin{aligned}
g_{11}(u_1, u_2, u_3) &= 1 - 2w_{12}u_2 - 2w_{13}u_3 + (w_{12}^2 + w_{23}^2 - k_1k_2)u_2^2 \\
&\quad + 2w_{12}w_{13}u_2u_3 + (w_{13}^2 + w_{23}^2 - k_1k_3)u_3^2 + O(3) \\
g_{12}(u_1, u_2, u_3) &= -w_{23}u_3 + O(3) \\
g_{13}(u_1, u_2, u_3) &= w_{23}u_2 + O(3) \\
g_{22}(u_1, u_2, u_3) &= 1 + k_2^2u_2^2 + O(3) \\
g_{23}(u_1, u_2, u_3) &= k_2k_3u_2u_3 + O(3) \\
g_{33}(u_1, u_2, u_3) &= 1 + k_3^2u_3^2 + O(3) \\
\lambda_{11}(u_1, u_2, u_3) &= k_1 - w_{12}(k_1 + k_2)u_2 - w_{13}(k_1 + k_3)u_3 + O(2) \\
\lambda_{12}(u_1, u_2, u_3) &= k_2' u_2 - w_{23}k_3u_3 + O(2) \\
\lambda_{13}(u_1, u_2, u_3) &= w_{23}k_2u_2 + k_3' u_3 + O(2) \\
\lambda_{22}(u_1, u_2, u_3) &= k_2 + au_2 + du_3 + O(2) \\
\lambda_{23}(u_1, u_2, u_3) &= du_2 + bu_3 + O(2) \\
\lambda_{33}(u_1, u_2, u_3) &= k_3 + bu_2 + cu_3 + O(2)
\end{aligned}$$

Os coeficiente da primeira e segunda forma e o vetor normal da hipersuperfície foram escritos usando o desenvolvimento de Taylor.

**Observação 2.2** Na equações acima  $O(n)$ ,  $n = 2, 3$ , significam  $O[(u_2^2, u_3^2)^{\frac{n}{2}}]$ .

## 2.2 A derivada da Transformação de Poincaré

Seja  $c$  um ciclo principal da folheação  $\mathcal{F}_1(\alpha)$ . A fim de estudar o comportamento de  $\mathcal{F}_1(\alpha)$  na vizinhança de  $c$  vamos estudar o mapa de Poincaré  $\Pi$  associado à  $\mathcal{F}_1(\alpha)$ .

**Proposição 2.3** *Considerando as coordenadas dadas no Lema 2.1, os conjuntos  $\{u_1 = 0\} = \{\alpha(0, u_2, u_3), (u_2, u_3) \in A\}$  e  $\{u_1 = L\} = \{\alpha(L, u_2, u_3), (u_2, u_3) \in B\}$  são seções transversais do campo de linhas de curvatura  $\mathcal{L}_1(\alpha)$ .*

**Demonstração:** Defina  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \alpha(M^3)$  dada por

$$f(u_2, u_3) = \alpha(0, u_2, u_3).$$

Temos que a derivada de  $f$  em  $(0, 0)$  é

$$\begin{aligned}
Df(0, 0) &= (\alpha_2(0, 0, 0) \quad \alpha_3(0, 0, 0)) \\
&= (e_2(0) \quad e_3(0))
\end{aligned}$$

e como a direção associada a  $\mathcal{L}_1(\alpha)$  em  $f(0, 0) = \alpha(0, 0, 0)$  é  $e_1(0)$ , temos que  $f$  é uma seção transversal.

Claramente, temos que  $f$  é contínua e tendo que

$$f^{-1}(f(A)) = (\langle \alpha(0, u_2, u_3) - \alpha(c(0)), e_2(0) \rangle, \langle \alpha(0, u_2, u_3) - \alpha(c(0)), e_3(0) \rangle)$$

também contínua, disto temos que  $f$  é um homeomorfismo. Segue-se que  $\{u = 0\}$  é uma seção transversal. Analogamente provamos que  $\{u_1 = L\}$  também é uma seção transversal. ■

**Proposição 2.4** *As seções transversais  $\{u_1 = 0\}$  e  $\{u_1 = L\}$  são iguais.*

**Demonstração:** Sejam  $u \in \{u_1 = 0\}$  e  $v \in \{u_1 = 0\}$ , temos que

$$u = \alpha(c(0)) + u_2 e_2(0) + u_3 e_3(0) + h(u_2, u_3) N_\alpha(0)$$

e

$$v = \alpha(c(L)) + u_2 e_2(L) + u_3 e_3(L) + h(u_2, u_3) N_\alpha(L).$$

Como  $c(0) = c(L)$ ,  $e_2(0) = e_2(L)$ ,  $e_3(0) = e_3(L)$  e  $N_\alpha(0) = N_\alpha(L)$ , segue o resultado. ■

Seja  $(u_1, u_2, u_3)$  a solução da equação diferencial que define o campo de linhas principais  $\mathcal{L}_1(\alpha)$ , com condição inicial  $(u_1, u_2, u_3)(0, u_2^0, u_3^0) = (0, u_2^0, u_3^0)$ . Assim, o mapa de Poincaré  $\Pi : V \cap \{u_1 = 0\} \rightarrow \{u_1 = L\}$  é definido por

$$\Pi(u_2^0, u_3^0) = (u_2(L, u_2^0, u_3^0), u_3(L, u_2^0, u_3^0)),$$

onde  $V$  é uma vizinhança de  $p \in \alpha \circ c$ .

**Proposição 2.5** *Nas condições acima temos que a derivada do mapa de Poincaré  $\Pi$  é dada por  $\Pi'(0) = U(L)$ , onde  $U$  é a solução da seguinte equação diferencial*

$$\begin{aligned} U' &= AU \\ U(0) &= I, \quad A(u_1) = A(u_1 + L), \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$A(u_1) = \begin{pmatrix} \frac{-k'_2}{k_2 - k_1} & \frac{w_{23}(k_3 - k_1)}{k_2 - k_1} \\ \frac{-w_{23}(k_2 - k_1)}{k_3 - k_1} & \frac{-k'_3}{k_3 - k_1} \end{pmatrix}.$$

**Demonstração:** A equação diferencial abaixo define as linhas de curvatura principal associada a curvatura  $k_1$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} - k_1 g_{11} & \lambda_{12} - k_1 g_{12} & \lambda_{13} - k_1 g_{13} \\ \lambda_{12} - k_1 g_{12} & \lambda_{22} - k_1 g_{22} & \lambda_{23} - k_1 g_{23} \\ \lambda_{13} - k_1 g_{13} & \lambda_{23} - k_1 g_{23} & \lambda_{33} - k_1 g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

sendo que a condição inicial é  $(0, u_2^0, u_3^0)$ , onde a condição  $\det(\lambda_{jk} - k_1 g_{jk}) = 0$  define o campo de linha principal  $\mathcal{L}_1(\alpha)$ .

Vamos encontrar  $du_2$  e  $du_3$  em função de  $du_1$ . Para isso, vamos escrever o sistema (2.3) de forma mais simples como está abaixo

$$\begin{cases} Adu_1 + Bdu_2 + Cdu_3 = 0 & I \\ Bdu_1 + Ddu_2 + Edu_3 = 0 & II \\ Cdu_1 + Edu_2 + Fdu_3 = 0 & III \end{cases}.$$

De (I), temos

$$du_2 = \frac{-Adu_1 - Cdu_3}{B} \quad IV,$$

de (II), temos

$$du_3 = \frac{-Bdu_1 - Ddu_2}{E} \quad V$$

e de (III), temos

$$\begin{aligned} du_2 &= \frac{-Cdu_1 - Fdu_3}{E} & VI \\ du_3 &= \frac{-Cdu_1 - Edu_2}{F} & VII. \end{aligned}$$

Substituindo (VII) em (IV), temos

$$\begin{aligned} du_2 &= \frac{-Adu_1 - C \left( \frac{-Cdu_1 - Edu_2}{F} \right)}{B} \\ &= \frac{-AFu_1 + C^2du_1 + CEdu_2}{BF} \end{aligned}$$

o que implica que

$$du_2 = \frac{C^2 - AF}{BF - CE} du_1 \quad VIII$$

Substituindo (VI) em (V), temos

$$\begin{aligned} du_3 &= \frac{-Bdu_1 - D\left(\frac{-Cdu_1 - Fdu_3}{E}\right)}{E} \\ &= \frac{-BEdu_1 + DCdu_1 + DFdu_3}{E^2} \end{aligned}$$

o que implica que

$$du_3 = \frac{DC - BE}{E^2 - DF} du_1 \quad IX.$$

Reescrevendo (VII) e (IX), temos

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{du_1} &= \frac{(\lambda_{13} - k_1 g_{13})^2 - (\lambda_{11} - k_1 g_{11})(\lambda_{33} - k_1 g_{33})}{(\lambda_{12} - k_1 g_{12})(\lambda_{33} - k_1 g_{33}) - (\lambda_{13} - k_1 g_{13})(\lambda_{23} - k_1 g_{23})} \\ \frac{du_2}{du_1} &= \frac{(\lambda_{22} - k_1 g_{22})(\lambda_{13} - k_1 g_{13}) - (\lambda_{12} - k_1 g_{12})(\lambda_{23} - k_1 g_{23})}{(\lambda_{23} - k_1 g_{23})^2 - (\lambda_{22} - k_1 g_{22})(\lambda_{33} - k_1 g_{33})} \end{aligned}$$

Tomando  $\frac{du_2}{du_1} = F_2$  e  $\frac{du_3}{du_1} = F_3$  e substituindo os valores de  $g_{ij}$  e  $\lambda_{ij}$ , temos

$$\begin{aligned} F_2(u_1, u_2, u_3) &= \frac{-k'_2}{k_2 - k_1} u_2 + w_{23} \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_1} u_3 + \bar{F}_2(u_1, u_2, u_3) \\ F_3(u_1, u_2, u_3) &= -w_{23} \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} u_2 + \frac{-k'_3}{k_3 - k_1} u_3 + \bar{F}_3(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

onde  $\frac{\partial \bar{F}_i}{\partial u_2}(u_1, 0, 0) = \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial u_3}(u_1, 0, 0) = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Diferenciando  $F_2$  e  $F_3$  em relação a  $u_2^0$  e  $u_3^0$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial u_2^0}(u_1, 0, 0) &= \left(\frac{-k'_2}{k_2 - k_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial u_2^0}\right) + \left(w_{23} \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial u_2^0}\right) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_3^0}(u_1, 0, 0) &= \left(\frac{-k'_2}{k_2 - k_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial u_3^0}\right) + \left(w_{23} \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial u_3^0}\right) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u_2^0}(u_1, 0, 0) &= \left(-w_{23} \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial u_2^0}\right) + \left(\frac{-k'_3}{k_3 - k_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial u_2^0}\right) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u_3^0}(u_1, 0, 0) &= \left(-w_{23} \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial u_3^0}\right) + \left(\frac{-k'_3}{k_3 - k_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial u_3^0}\right) \end{aligned}$$

e sendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_2^0} \left( \frac{du_2}{du_1} \right) &= \frac{d}{du_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial u_2^0} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u_3^0} \left( \frac{du_2}{du_1} \right) &= \frac{d}{du_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial u_3^0} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u_2^0} \left( \frac{du_3}{du_1} \right) &= \frac{d}{du_1} \left( \frac{\partial u_3}{\partial u_2^0} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u_3^0} \left( \frac{du_3}{du_1} \right) &= \frac{d}{du_1} \left( \frac{\partial u_3}{\partial u_3^0} \right)\end{aligned}$$

visto que  $\frac{du_2}{du_1}$  e  $\frac{du_3}{du_1}$  são de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , em relação as condições iniciais.

Disso, temos o sistema 2.2 e como

$$\Pi'(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_2^0} & \frac{\partial u_3}{\partial u_2^0} \\ \frac{\partial u_2}{\partial u_3^0} & \frac{\partial u_3}{\partial u_3^0} \end{pmatrix}$$

temos o que queríamos. ■

## Capítulo 3

# Ciclos Principais Hiperbólicos de Hipersuperfícies imersas no $\mathbb{R}^4$

Seja  $c$  um ciclo principal de  $\mathcal{F}_i(\alpha)$  e considere as coordenadas  $(u_1, u_2, u_3)$  dadas pelo lema 2.1. Além disso, suponhamos que  $k_1|_c$  não é uma função constante.

Seja  $c_0 \subseteq c$  um arco aberto onde  $dk_1(e_1)|_{c_0} \neq 0$  e tome a seguinte perturbação

$$\alpha(\varepsilon, u_1, u_2, u_3) = \alpha(u_1, u_2, u_3) + \left[ \frac{\varepsilon}{2} w_2(u_1) u_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} w_3(u_1) u_3^2 \right] \Delta (u_2^2 + u_3^2) N(u_1) \quad (3.1)$$

onde  $w_2, w_3 : c \rightarrow \mathbb{R}^1$  são funções de classe  $C^\infty$  tal que  $c_0 \supseteq \text{supp}(w_2) \cup \text{supp}(w_3)$  e  $\Delta$  é uma função  $C^\infty$ , tal que  $\Delta(r) = 1$  para  $r = u_2^2 + u_3^2 \leq \delta$  e  $\Delta(r) = 0$  para  $r \geq 2\delta > 0$ , sendo  $\delta > 0$ .

Como a nossa perturbação é feita apenas no coeficiente de  $N_\alpha$ , e  $\alpha$  e  $\alpha(\varepsilon)$  têm contato quadrático ao longo dos pontos de  $c$ , segue-se que as equações de Darboux não dependem de  $\varepsilon$ .

### Proposição 3.1

$$\begin{aligned} k_1(\varepsilon, u_1) &= k_1(u_1) \\ k_2(\varepsilon, u_1) &= k_2(u_1) + \varepsilon w_2(u_1) \\ k_3(\varepsilon, u_1) &= k_3(u_1) + \varepsilon w_3(u_1) \end{aligned}$$

onde  $k_i(\varepsilon, .)$  denota as funções das curvaturas principais correspondentes à  $\bar{\alpha}(\varepsilon, .)$ .

**Demonstração:** Vimos na demonstração do Lema 2.1 que o dobro do coeficiente de  $u_2^2$  e do coeficiente de  $u_3^2$  da função  $h(u_2, u_3)$  são, respectivamente, as curvaturas principais  $k_2(u_1)$  e  $k_3(u_1)$  de  $\alpha(u_1, u_2, u_3)$ . Note que a nossa perturbação é realizada exatamente na função  $h(u_2, u_3)$ , que passa ser

$$h(\varepsilon, 0, 0) = (k_2(u_1) + \varepsilon w_2(u_1)\Delta(0^2 + 0^2))u_2^2 + (k_3(u_1) + \varepsilon w_3(u_1)\Delta(0^2 + 0^2))u_3^2,$$

como  $r = 0$ , temos que  $r < \delta$ , daí temos que  $\Delta(0^2 + 0^2) = 1$ , disto segue o que queríamos. ■

**Teorema 3.2** *Seja  $c$  um ciclo principal de  $\mathcal{F}_1(\alpha)$ . Suponha que  $k_1$  não é constante ao longo de  $c$ . Então dado  $\varepsilon > 0$  e  $r \in \mathbb{N}$ , existe uma imersão  $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}^{\infty, r}$  tal que  $\|\alpha - \bar{\alpha}\|_r < \varepsilon^1$  e  $c$  é um ciclo principal hiperbólico de  $\mathcal{F}_1(\bar{\alpha})$ .*

**Demonstração:** Nosso objetivo é definir  $w_2(u_1)$  e  $w_3(u_1)$  de forma que  $c$  seja ciclo principal hiperbólico de  $\alpha(\varepsilon, u_1, u_2, u_3)$ .

Suponha que a derivada da transformação de Poincaré  $\Pi'(0) = U(L)$  não seja um isomorfismo hiperbólico, então ela possui ao menos um autovalor no círculo unitário. Daí, podem ocorrer os seguintes casos:

Caso 1:  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ .

Caso 2:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ .

Caso 3:  $\det(U(L, \varepsilon)) \neq 1$  e  $|\lambda_1| = 1$ .

Vamos verificar para quais casos o teorema é válido.

**Caso 1:** Da fórmula de Liouville, temos que

$$\det U(L, \varepsilon) = \exp \left( \int_0^L \text{tr} A(u_1, \varepsilon) du_1 \right). \quad (3.2)$$

Diferenciando a equação (3.2) com respeito a  $\varepsilon$ , temos

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\det U(L, \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} = \exp \left( \int_0^L \text{tr} A(u_1, \varepsilon) du_1 \right) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^L (\text{tr} A(u_1, \varepsilon)) du_1 \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Usando a proposição 3.1 e lembrando que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-k'_2}{k_2 - k_1} & \frac{w_{23}(k_3 - k_1)}{k_2 - k_1} \\ \frac{-w_{23}(k_2 - k_1)}{k_3 - k_1} & \frac{-k'_3}{k_3 - k_1} \end{pmatrix},$$

---

<sup>1</sup>  $\|D^i \alpha - D^i \bar{\alpha}\| < \varepsilon, 0 \leq i \leq r$ .



ver 2.2, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}(\det U(L, \varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} &= \det U(L) \cdot \int_0^L \left( \frac{d}{d\varepsilon} (\text{tr } A(u_1, \varepsilon)) \right) du_1 \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^L \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{-k'_2 - \varepsilon w'_2}{k_2 + \varepsilon w_2 - k_1} + \frac{-k'_3 - \varepsilon w'_3}{k_3 + \varepsilon w_3 - k_1} \right) \right] du_1 \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^L \left( \frac{-w'_2(k_2 + \varepsilon w_2 - k_1) - w_2(-k'_2 - \varepsilon w'_2)}{(k_2 + \varepsilon w_2 - k_1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{-w'_3(k_3 + \varepsilon w_3 - k_1) - w_3(-k'_3 - \varepsilon w'_3)}{(k_3 + \varepsilon w_3 - k_1)^2} \right) du_1 \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^L \left[ \frac{w_2 k'_2}{(k_2 - k_1)^2} - \frac{w'_2}{k_2 - k_1} + \frac{w_3 k'_3}{(k_3 - k_1)^2} - \frac{w'_3}{k_3 - k_1} \right] du_1. \\
&= \int_0^L \frac{w_2 k'_2}{(k_2 - k_1)^2} du_1 - \int_0^L \frac{w'_2}{k_2 - k_1} du_1 \\
&\quad + \int_0^L \frac{w_3 k'_3}{(k_3 - k_1)^2} du_1 - \int_0^L \frac{w'_3}{k_3 - k_1} du_1 \\
&= \int_0^L \frac{w_2 k'_2}{(k_2 - k_1)^2} du_1 - \left( \frac{w_2}{k_2 - k_1} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{w_2 k'_2}{(k_2 - k_1)^2} du_1 \right. \\
&\quad \left. - \int_0^L \frac{w_2 k'_1}{(k_2 - k_1)^2} du_1 \right) + \int_0^L \frac{w_3 k'_3}{(k_3 - k_1)^2} du_1 \\
&\quad - \left( \frac{w_3}{k_3 - k_1} \Big|_0^L + \int_0^L \frac{w_3 k'_3}{(k_3 - k_1)^2} du_1 - \int_0^L \frac{w_3 k'_1}{(k_3 - k_1)^2} du_1 \right) \\
&= \int_0^L \left[ \frac{w_2 k'_1}{(k_2 - k_1)^2} + \frac{w_3 k'_1}{(k_3 - k_1)^2} \right] du_1 \\
&\quad - \frac{w_2}{k_2 - k_1} \Big|_0^L - \frac{w_3}{k_3 - k_1} \Big|_0^L \\
&= \int_0^L \left[ \frac{w_2 k'_1}{(k_2 - k_1)^2} + \frac{w_3 k'_1}{(k_3 - k_1)^2} \right] du_1 \\
&\quad - \frac{w_2(L)}{k_2(L) - k_1(L)} + \frac{w_2(0)}{k_2(0) - k_1(0)} \\
&\quad - \frac{w_3(L)}{k_3(L) - k_1(L)} + \frac{w_3(0)}{k_3(0) - k_1(0)} \\
&= \int_0^L \left[ \frac{w_2 k'_1}{(k_2 - k_1)^2} + \frac{w_3 k'_1}{(k_3 - k_1)^2} \right] du_1 \\
&\quad + \frac{w_2(0) - w_2(L)}{k_2(0) - k_1(0)} + \frac{w_3(0) - w_3(L)}{k_3(0) - k_1(0)}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\det U(L, \varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^L \left[ \frac{w_2 k'_1}{(k_2 - k_1)^2} + \frac{w_3 k'_1}{(k_3 - k_1)^2} \right] du_1,$$

visto que  $k_i(0) = k_i(L)$  e  $w_2(0) = w_2(c(o)) = w_3(c(L)) = w_3(L)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Assim, definindo  $w_2 = w_3 = k'_1$ , segue-se que

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\det U(L, \varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^L \left[ \frac{(k'_1)^2}{(k_2 - k_1)^2} + \frac{(k'_1)^2}{(k_3 - k_1)^2} \right] du_1.$$

Como  $k_1|_c$  não é constante, resulta que

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\det U(L, \varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} \neq 0.$$

Sendo assim, concluímos que numa vizinhança do zero,  $\det U(L, \varepsilon)$  é um difeomorfismo, pelo Teorema da Função Inversa.

Os autovalores de  $U(L, \varepsilon)$  são complexos. De fato, denotando  $\lambda_1(U(L)) = a + bi$  e  $\lambda_2(U(L)) = a - bi$ , com  $b \neq 0$ , teremos que  $b(\varepsilon) \neq 0$  para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, por continuidade, logo  $\lambda_1(U(L, \varepsilon))$  e  $\lambda_2(U(L, \varepsilon))$  também são complexos.

Assim,

$$\det U(L, \varepsilon) = (a(\varepsilon))^2 + (b(\varepsilon))^2 \neq 1.$$

Logo, temos que os autovalores de  $U(L, \varepsilon)$  não pertencem ao círculo unitário.

Assim, podemos concluir que se os autovalores de  $U(L)$  são complexos, é possível tornar  $U(L, \varepsilon)$  hiperbólico com o tipo de perturbação considerada.

**Caso 2:**  $\det(U(L, \varepsilon))$  não é suficiente para garantir que  $c$  será hiperbólico, visto que os seus autovalores são simples, logo não são diferenciáveis.

**Caso 3:** Escrevendo  $U(L, \varepsilon)$  com o desenvolvimento de Taylor, temos

$$U(L, \varepsilon) = U(L, 0) + \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}(L, 0) + O(\varepsilon^2).$$

Como  $U'(u_1, \varepsilon) = A(u_1, \varepsilon)U(u_1, \varepsilon)$ , diferenciando em  $\varepsilon$  e aplicando em  $\varepsilon = 0$ , obtemos

$$\frac{d}{du_1} \left( \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right) (u_1, 0) = A(u_1) \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}(u_1, 0) + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon}(u_1, 0)U(u_1, 0).$$

Integrando a expressão acima em  $u_1$ , temos

$$\int_0^L \frac{d}{du_1} \left( \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right) (u_1, 0) du_1 = \int_0^L \left( A(u_1) \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} (u_1, 0) + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} (u_1, 0) U(u_1, 0) \right) du_1$$

o que implica

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} (L, 0) - \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} (0, 0) = \int_0^L \left( A(u_1) \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} (u_1, 0) + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} (u_1, 0) U(u_1, 0) \right) du_1,$$

disto, temos

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} (L, 0) = U(L) \int_0^L U^{-1}(u_1) \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} (u_1, 0) U(u_1) du_1$$

chame  $\int_0^L U^{-1}(u_1) \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} (u_1, 0) U(u_1) du_1 = B$ .

Lembre que supomos que  $\lambda_1(U(L))$  e  $\lambda_2(U(L))$  são reais e distintos.

Seja  $F$  invertível tal que

$$F^{-1}U(L)F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad F = (f_1, f_2),$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são os vetores colunas da matriz  $F$ .

Os autovalores de  $U(L, \varepsilon)$  e  $F^{-1}U(L)F$  são iguais e são definidos pela equação

$$\det(U(L, \varepsilon) - \lambda(\varepsilon)I) = \det(F^{-1}U(L, \varepsilon)F - \lambda(\varepsilon)I) = 0.$$

Desenvolvendo o lado direito temos

$$\begin{aligned} \det(F^{-1}U(L, \varepsilon)F - \lambda(\varepsilon)I) &= \det(F^{-1}U(L)F + \varepsilon F^{-1}U(L)BF + O(\varepsilon^2) \\ &\quad - \lambda(\varepsilon)I) = 0 \end{aligned}$$

A fim de fixar notação escreveremos

$$F^{-1}U(L)BF = F^{-1}U(L)FF^{-1}BF = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Segue que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) - \begin{pmatrix} \lambda_1(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o que implica que

$$\begin{aligned}\lambda_1(U(L, \varepsilon)) &= \lambda_1(U(L)) + \varepsilon \lambda_1(U(L)) b_{11} + O(\varepsilon^2) \text{ e} \\ \lambda_2(U(L, \varepsilon)) &= \lambda_2(U(L)) + \varepsilon \lambda_2(U(L)) b_{22} + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda_1(U(L, \varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} = \lambda_1(U(L)) b_{11} \text{ e } \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda_2(U(L, \varepsilon)) \right|_{\varepsilon=0} = \lambda_2(U(L)) b_{22}.$$

Note que  $b_{11} = \langle F^{-1} B F v_1, v_1 \rangle$  e  $b_{22} = \langle F^{-1} B F v_2, v_2 \rangle$ , onde  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Portanto usando a definição de  $B$  e  $F$ , obtemos

$$b_{11} = \int_0^L \langle U^{-1} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} U f_1, (F^{-1})^* F^{-1} f_1 \rangle du_1 \quad (3.3)$$

$$b_{22} = \int_0^L \langle U^{-1} \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} U f_2, (F^{-1})^* F^{-1} f_2 \rangle du_1, \quad (3.4)$$

onde  $F^*$  denota a adjunta da matriz  $F$ .

Usando as equações 3.1 segue que

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial A}{\partial \varepsilon}(u_1, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{-k'_2(\varepsilon, u_1)}{(k_2 - k_1)(\varepsilon, u_1)} & \frac{w_{23}(k_3 - k_1)(\varepsilon, u_1)}{(k_2 - k_1)(\varepsilon, u_1)} \\ \frac{-w_{23}(k_2 - k_1)(\varepsilon, u_1)}{(k_3 - k_1)(\varepsilon, u_1)} & \frac{-k'_3(\varepsilon, u_1)}{(k_3 - k_1)(\varepsilon, u_1)} \end{pmatrix} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{-k'_2 - \varepsilon w'_2}{k_2 + \varepsilon w_2 - k_1} & \frac{w_{23}(k_3 + \varepsilon w_3 - k_1)}{k_2 + \varepsilon w_2 - k_1} \\ \frac{-w_{23}(k_2 + \varepsilon w_2 - k_1)}{k_3 + \varepsilon w_3 - k_1} & \frac{-k'_3 - \varepsilon w'_3}{k_3 + \varepsilon w_3 - k_1} \end{pmatrix} \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-w'_2}{k_2 - k_1} + \frac{k'_2 w_2}{(k_2 - k_1)^2} & \frac{w_{23}[w_3(k_2 - k_1) - w_2(k_3 - k_1)]}{(k_2 - k_1)^2} \\ \frac{w_{23}[w_2(k_3 - k_1) - w_3(k_2 - k_1)]}{(k_3 - k_1)^2} & \frac{-w'_3}{k_3 - k_1} + \frac{k'_3 w_3}{(k_3 - k_1)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.5)\end{aligned}$$

Tomando  $w_2(k_3 - k_1) = w_3(k_2 - k_1)$  segue que  $\left. \frac{\partial A}{\partial \varepsilon}(u_1, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0}$  é uma matriz diagonal.

Agora realizando a integração por partes em 3.3 e usando 3.5 obtém-se

$$b_{11} = \int_0^L \left[ P_2(u_1) w_2(u_1) + P_3(u_1) \frac{w_2(u_1)(k_2 - k_1)}{k_3 - k_1} \right] du_1 = \int_0^L P(u_1) w_2(u_1) du_1$$

onde  $P_2(0) = \frac{k'_1}{(k_2 - k_1)^2}(0) \langle F^{-1} f_1, F^{-1} f_1 \rangle \neq 0$  e

$$P_3(0) = \frac{k'_1}{(k_3 - k_1)^2}(0) \langle F^{-1} f_1, F^{-1} f_1 \rangle \neq 0.$$

Portanto escolhemos  $w_2, w_3 \in C^\infty(c)$  tal que  $\frac{db_{11}}{du_1}(u_1)$  não é identicamente nulo podemos encontrar  $\widehat{w}_2, \widehat{w}_3 \in C_0^\infty(c)$  tal que  $b_{11}(L) = b_{11} \neq 0$ .

Aqui  $b_{11}(u_1) = \int_0^{u_1} P(u_1)w_2(u_1)du_1$ .

Um argumento análogo deve ser utilizado a fim de garantir que  $b_{22} \neq 0$ .

Com isso, mostrarmos que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, teremos que  $\lambda_i(\varepsilon) \neq 1$ , para  $i = 1, 2$ . Isso nos diz que neste caso também podemos tornar  $c$  hiperbólico com a perturbação dada.

■

## Capítulo 4

# Hipersuperfície em torno de Ciclos Principais Hiperbólicos, um problema inverso

Seja  $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma curva fechada parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  e de comprimento  $L > 0$ . Por um abuso de notação denotaremos esta curva apenas por  $c$ . Consideremos o quadriedro de Frenet  $\{v_1(s), v_2(s), v_3(s), v_4(s)\}$  ao longo de  $c$  construído como segue:

Tomamos  $v_1(s) = c'(s)$ , como  $c$  está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que este é unitário. Tomamos também  $\tau_1(s) = |v_1'(s)|$  e supomos que  $\tau_1(s) \neq 0$  para todo  $s$ . Definindo  $v_2(s) = \tau_1(s)^{-1}v_1'(s)$ , teremos que

$$v_1'(s) = \tau_1(s)v_2(s), \quad (4.1)$$

donde segue-se que  $v_2(s)$  é unitário e ortogonal a  $v_1(s)$ , já que derivando  $\langle v_1(s), v_1(s) \rangle = 1$  com relação a  $s$  obtemos que  $\langle v_1(s), v_1'(s) \rangle = 0$ . E derivando a relação  $\langle v_2(s), v_2(s) \rangle = 1$ , temos que

$$\langle v_2(s), v_2(s) \rangle' = 0$$

o que implica que

$$\langle v_2'(s), v_2(s) \rangle = 0.$$

Derivando  $\langle v_2(s), v_1(s) \rangle = 0$  em relação a  $s$ , temos que

$$\langle v_2(s), v_1(s) \rangle' = 0,$$

ou seja,

$$\langle v_2'(s), v_1(s) \rangle + \langle v_2(s), v_1'(s) \rangle = 0$$

que equivale a

$$\langle v_2'(s), v_1(s) \rangle + \langle v_2(s), \tau_1(s)v_2(s) \rangle = 0,$$

logo  $\langle v_2'(s), v_1(s) \rangle = -\tau_1$ . Assim, temos que

$$v_2'(s) = -\tau_1(s)v_1(s) + \text{vetor perpendicular a } v_1(s) \text{ e } v_2(s).$$

Definamos  $\tau_2(s) = |v_2'(s) + \tau_1(s)v_1(s)|$  e suponhamos que  $\tau_2(s) \neq 0$ , então o terceiro vetor do quadriedro de Frenet é dado por  $v_3(s) = \tau_2(s)^{-1}(v_2'(s) + \tau_1(s)v_1(s))$  que é unitário e ortogonal a  $v_1(s)$  e  $v_2(s)$  por construção, além disso

$$v_2'(s) = -\tau_1(s)v_1(s) + \tau_2(s)v_3(s). \quad (4.2)$$

Novamente, derivando  $\langle v_3(s), v_1(s) \rangle = 0$  em relação a  $s$ , temos que

$$\langle v_3'(s), v_1(s) \rangle + \langle v_3(s), v_1'(s) \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\langle v_3'(s), v_1(s) \rangle + \langle v_3(s), \tau_1(s)v_2(s) \rangle = 0,$$

logo  $\langle v_3'(s), v_1(s) \rangle = 0$ . E derivando a relação  $\langle v_3(s), v_2(s) \rangle = 0$  em relação a  $s$ , obtemos

$$\langle v_3'(s), v_2(s) \rangle + \langle v_3(s), v_2'(s) \rangle = 0$$

e usando (4.2), temos

$$\langle v_3'(s), v_2(s) \rangle + \langle v_3(s), \tau_1(s)v_1(s) + \tau_2(s)v_3(s) \rangle = 0,$$

logo  $\langle v_3'(s), v_2(s) \rangle = -\tau_2(s)$ . Portanto, segue-se que

$$v_3'(s) = -\tau_2(s)v_2(s) + \text{vetor perpendicular a } v_1(s), v_2(s) \text{ e } v_3(s).$$

Como antes, definimos  $\tau_3(s) = |v_3'(s) + \tau_2(s)v_2(s)|$ , supomos que  $\tau_3(s) \neq 0$  para todo  $s$  e tomamos

$$v_4(s) = \tau_3(s)^{-1}(v_3'(s) + \tau_2(s)v_2(s))$$

que é unitário, perpendicular a  $v_1(s)$ ,  $v_2(s)$  e  $v_3(s)$  e ainda é tal que

$$v_3'(s) = -\tau_2(s)v_2(s) + \tau_3(s)v_4(s). \quad (4.3)$$

Analogamente, das relações  $\langle v_4(s), v_3(s) \rangle = 0$ ,  $\langle v_4(s), v_2(s) \rangle = 0$  e  $\langle v_4(s), v_1(s) \rangle = 0$  obtemos que  $\langle v_4'(s), v_3(s) \rangle = -\tau_3(s)$ ,  $\langle v_4'(s), v_2(s) \rangle = 0$  e  $\langle v_4'(s), v_1(s) \rangle = 0$ , resultando que

$$v_4'(s) = -\tau_3(s)v_3(s). \quad (4.4)$$

**Definição 4.1** As funções  $\tau_1(s)$ ,  $\tau_2(s)$ ,  $\tau_3(s)$  são chamadas curvaturas generalizadas.

**Proposição 4.2** Se as curvaturas generalizadas são não nulas, então os vetores  $\frac{d}{ds}c(s)$ ,  $\frac{d^2}{ds^2}c(s)$ ,  $\frac{d^3}{ds^3}c(s)$ ,  $\frac{d^4}{ds^4}c(s)$  são linearmente independentes.

**Demonstração:** Temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}c(s) &= v_1(s) \\ \frac{d^2}{ds^2}c(s) &= \tau_1(s)v_2(s) \\ \frac{d^3}{ds^3}c(s) &= -(\tau_1(s))^2v_1(s) + \tau_1'(s)v_2(s) + \tau_1(s)\tau_2(s)v_3(s) \\ \frac{d^4}{ds^4}c(s) &= -3\tau_1(s)\tau_1'(s)v_1(s) + (\tau_1''(s) - (\tau_1(s))^3 - \tau_1(s)(\tau_2(s))^2)v_2(s) \\ &\quad + ((\tau_1(s)\tau_2(s))' + \tau_1'(s)\tau_2(s))v_3(s) \\ &\quad + \tau_1(s)\tau_2(s)\tau_3(s)v_4(s).\end{aligned}$$

$$a\frac{d}{ds}c(s) + b\frac{d^2}{ds^2}c(s) + c\frac{d^3}{ds^3}c(s) + d\frac{d^4}{ds^4}c(s) = 0$$

o que implica que

$$\begin{aligned}av_1(s) + b\tau_1(s)v_2(s) + c(-(\tau_1(s))^2v_1(s) + \tau_1'(s)v_2(s) + \tau_1(s)\tau_2(s)v_3(s)) \\ + d[-3\tau_1(s)\tau_1'(s)v_1(s) + (\tau_1''(s) - (\tau_1(s))^3 - \tau_1(s)(\tau_2(s))^2)v_2(s) \\ + ((\tau_1(s)\tau_2(s))' + \tau_1'(s)\tau_2(s))v_3(s) + \tau_1(s)\tau_2(s)\tau_3(s)v_4(s)] = 0\end{aligned}$$

que equivale a

$$\begin{aligned}(a - c(\tau_1(s))^2 - 3d\tau_1(s)\tau_1'(s))v_1(s) \\ + (b\tau_1(s) + c\tau_1'(s) + d(\tau_1''(s) - (\tau_1(s))^3 - \tau_1(s)(\tau_2(s))^2))v_2(s) \\ + (c\tau_1(s)\tau_2(s) + d((\tau_1(s)\tau_2(s))' + \tau_1'(s)\tau_2(s)))v_3(s) \\ + d\tau_1(s)\tau_2(s)\tau_3(s)v_4(s) = 0.\end{aligned}$$

Como  $v_1(s)$ ,  $v_2(s)$ ,  $v_3(s)$ ,  $v_4(s)$  são linearmente independentes, temos que

$$\begin{cases} a - c(\tau_1(s))^2 - 3d\tau_1(s)\tau_1'(s) = 0 \\ b\tau_1(s) + c\tau_1'(s) + d(\tau_1''(s) - (\tau_1(s))^3 - \tau_1(s)(\tau_2(s))^2) = 0 \\ c\tau_1(s)\tau_2(s) + d((\tau_1(s)\tau_2(s))' + \tau_1'(s)\tau_2(s)) = 0 \\ d\tau_1(s)\tau_2(s)\tau_3(s) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$



Supondo que  $\tau_1(s)$ ,  $\tau_2(s)$  e  $\tau_3(s)$  são não nulas, temos que  $d = 0$  o sistema 4.5 equivale a

$$\begin{cases} a - c(\tau_1(s))^2 = 0 \\ b\tau_1(s) + c\tau_1'(s) = 0 \\ c\tau_1(s)\tau_2(s) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

temos que  $c = 0$  e o sistema 4.6 equivale a

$$\begin{cases} a = 0 \\ b\tau_1(s) = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

temos que  $b = 0$  e  $a = 0$ . Disto temos que os vetores  $\frac{d}{ds}c(s)$ ,  $\frac{d^2}{ds^2}c(s)$ ,  $\frac{d^3}{ds^3}c(s)$ ,  $\frac{d^4}{ds^4}c(s)$  são linearmente independentes.

■

**Definição 4.3** *Uma curva em  $\mathbb{R}^4$  cujas curvaturas generalizadas não se anulam é chamada curva triregular.*

Na construção anterior poderíamos supor que  $\tau_3(s) = 0$  e definir  $v_4$  como sendo o produto exterior de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ .

**Definição 4.4** *Uma curva em  $\mathbb{R}^4$  cujas curvaturas generalizadas  $\tau_1(s)$  e  $\tau_2(s)$  não se anulam e  $\tau_3(s) = 0$  é chamada espacial.*

Para uso posterior destacamos as equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4).

$$\begin{aligned} v_1' &= \tau_1 v_2 \\ v_2' &= -\tau_1 v_1 + \tau_2 v_3 \\ v_3' &= -\tau_2 v_2 + \tau_3 v_4 \\ v_4' &= -\tau_3 v_3 \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde omitimos o  $s$  para simplificar a notação.

No que segue, iremos sempre supor que  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$  e que  $c$  é triregular ou é espacial.

**Teorema 4.5** *(R. Garcia) Seja  $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^4$  uma curva fechada regular suave em  $\mathbb{R}^4$  com curvatura positiva  $\tau_1$  e de comprimento  $L > 0$ , cuja a equações de Frenet são satisfeitas. Então a curva  $c$  é a união de linhas principais.*

**Demonstração:** Defina,  $N = y(s)v_2(s) + z(s)v_3(s) + w(s)v_4(s)$ , sendo que  $(y(s), z(s), w(s))$  é um vetor unitário. Derivando  $N$  em relação a  $s$  temos que

$$N'(s) = y'(s)v_2(s) + y(s)v_2'(s) + z'(s)v_3(s) + z(s)v_3'(s) + w'(s)v_4(s) + w(s)v_4'(s)$$

usando as equações 4.8, temos

$$N'(s) = (-\tau_1 y)v_1(s) + (y' - \tau_2 z)v_2(s) + (z' + \tau_2 y - \tau_3 w)v_3(s) + (w' + \tau_3 z)v_4(s).$$

Assim,  $c$  é linha principal se, e somente se,

$$\begin{aligned} y' &= \tau_2 z \\ z' &= -\tau_2 y + \tau_3 w \\ w' &= -\tau_3 z. \end{aligned}$$

O sistema de equações diferenciais acima pode ser representado pela equação diferencial linear não-autônoma abaixo

$$X'(s) = A(s)X(s),$$

sendo que  $X(s) = (y(s), z(s), w(s))$  e

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \tau_2(s) & 0 \\ -\tau_2(s) & 0 & \tau_3(s) \\ 0 & -\tau_3(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema de Picard, temos que o problema de valor inicial (P.V.I.) abaixo possui uma única solução

$$\begin{cases} X'(s) = A(s)X(s) \\ X(0) = p \end{cases} \quad (4.9)$$

onde  $p \in S^3$ .

Seja  $\phi(s, p)$  a solução do P.V.I. (4.9). Vamos encontrar  $p$  para que  $\phi(s, p)$  seja periódica.

Defina  $\phi_L : S^2 \rightarrow S^2$  dada por  $\phi_L(p) = \phi(L, p)$ .  $\phi_L$  possui um ponto fixo. De fato,  $\phi_L$  é um difeomorfismo e, pela forma de Liouville,  $\det(D\phi_L)(p) = 1$ . Como sabemos que qualquer difeomorfismo do  $S^2$  preservando área e orientação tem pelo menos dois pontos fixos, escolheremos  $p$  como sendo um desses pontos fixos de  $\phi_L$ . Assim,  $\phi_L(p) = p$ , ou seja,

$$\phi(L, p) = \phi(0, p).$$

Portanto  $\phi(s, p)$  é uma solução periódica.

■

O teorema acima mostra a existência de uma hipersuperfície do  $\mathbb{R}^4$  contendo a curva  $c$  e tendo-a como ciclo principal. Agora iremos construir um exemplo de uma hipersuperfície do  $\mathbb{R}^4$  onde  $c$  é ciclo principal hiperbólico. O procedimento que utilizaremos é baseado no do artigo “Surfaces Around Closed Principal Curvature Lines, an Inverse Problem.” de Garcia, Mello e Sotomayor, ver [5].

Para  $s \in [0, L]$  e  $|u|, |v| < \epsilon$  consideremos

$$\alpha(s, u, v) = c(s) + vN_1(s) + uN_2(s) + \left( \frac{k_2(s)}{2}u^2 + \frac{k_3(s)}{2}v^2 + H(s, u, v) \right) N(s), \quad (4.10)$$

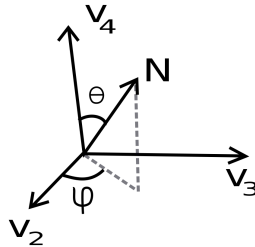
onde

$$N(s) = \sin(\theta(s)) \cos(\varphi(s))v_2 + \sin(\theta(s)) \sin(\varphi(s))v_3 + \cos(\theta(s))v_4 \quad (4.11)$$

$$N_1(s) = \cos(\theta(s)) \cos(\varphi(s))v_2 + \cos(\theta(s)) \sin(\varphi(s))v_3 - \sin(\theta(s))v_4 \quad (4.12)$$

$$N_2(s) = \sin\varphi(s)v_2(s) - \cos\varphi(s)v_3(s), \quad (4.13)$$

com  $\theta(s)$  e  $\varphi(s)$  como na figura abaixo:



Como

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s, 0, 0) = v_1(s), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u}(s, 0, 0) = N_2(s), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v}(s, 0, 0) = N_1(s),$$

segue-se, pelo Teorema da Função Inversa, ver [8], que  $\alpha(s, u, v)$  é um difeomorfismo local, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, definindo portanto uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^4$ .

**Proposição 4.6** *Suponha que  $\tau_3 = 0$ . A curva  $c$  é linha de curvatura principal para  $\alpha$  se e somente se  $\theta \equiv \text{const}$  e  $\sin\theta(s)(\varphi'(s) + \tau_2(s)) = 0$ .*

**Demonstração: 4.7** *Pela proposição 1.19, a curva  $c(s)$  é linha de curvatura de  $\alpha$  se e só se*

$$N'(s) = -k_1(s)v_1(s), \quad (4.14)$$

onde  $k_1(s)$  é uma curvatura principal de  $\alpha$ . Disto, derivando (4.11) e usando (4.8) obtemos

$$\begin{aligned}
-k_1 v_1 &= N' = -\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \tau_1 v_1 \\
&\quad + (\theta' \cos\theta \cos\varphi - \varphi' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \tau_2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi) v_2 \\
&\quad + (\theta' \cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \varphi' \cos\varphi \operatorname{sen}\theta + \tau_2 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi) v_3 \\
&\quad + (-\theta' \operatorname{sen}\theta) v_4 \\
&= -\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \tau_1 v_1 \\
&\quad + \theta' (\cos\theta \cos\varphi v_2 + \cos\theta \operatorname{sen}\varphi v_3 - \operatorname{sen}\theta v_4) \\
&\quad - (\varphi' + \tau_2) \operatorname{sen}\theta (\operatorname{sen}\varphi v_2 - \cos\varphi v_3) \\
&= -\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \tau_1 v_1 \\
&\quad + \theta' N_1 \\
&\quad - (\varphi' + \tau_2) \operatorname{sen}\theta N_2
\end{aligned}$$

portanto,  $c$  é linha de curvatura para  $\alpha$  se e só se

$$\begin{cases} \theta' = 0 \\ (\varphi' + \tau_2) \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}, \quad (4.15)$$

disto temos o que queríamos.

**Teorema 4.8** *Considere a hipersuperfície parametrizada orientável  $\alpha$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 4$ , definida anteriormente. Seja  $c$  um ciclo principal espacial, tal que  $\theta$  é constante e  $\varphi'(s) = -\tau_2(s)$ , então  $c$  é uma ciclo principal hiperbólico se, e somente se,*

$$\begin{aligned}
&\int \frac{k_2'(s) \operatorname{sen}\theta(s)}{k_2(s) \operatorname{sen}\theta(s) - \tau_1(s) \cos\varphi(s)} \neq 0, \\
&\int \frac{k_3'(s) \operatorname{sen}\theta(s)}{\tau_1(s) \cos\varphi(s) - k_3(s) \operatorname{sen}\theta(s)} \neq 0.
\end{aligned}$$

**Demonstração:** Por hipótese temos que  $\theta$  é constante e  $\varphi'(s) = -\tau_2(s)$ , assim pela proposição 4.6, temos que  $c$  é um ciclo principal de  $\alpha$ .

Derivando (4.10), usando (4.8) e  $\theta' = 0$ ,  $\varphi' = -\tau_2$ , teremos que os coefi-

cientes  $g_{ij}$  da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle = 1 - 2 \cos(\theta) \cos(\varphi(u)) \tau_1(u) w - 2 \tau_1(u) \sin(\varphi(u)) v + O(2) \\
g_{22} &= \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle = 1 + a_{30}(u) k_2(u) v^3 + (k_2(u))^2 v^2 + a_{12}(u) k_2(u) v w^2 \\
&\quad + 2 a_{21}(u) k_2(u) w v^2 + O(4) \\
g_{33} &= \langle \alpha_{u_3}, \alpha_{u_3} \rangle = 1 + k_3(u) a_{21}(u) v^2 w + 2 k_3(u) a_{12}(u) v w^2 + (k_3(u))^2 w^2 \\
&\quad + k_3(u) a_{03}(u) w^3 + O(4) \\
g_{12} &= \langle \alpha_{u_1}, \alpha_{u_2} \rangle = \frac{1}{2} v k_2(u) (v^2 k'_2(u) + w^2 k'_3(u)) + O(4) \\
g_{13} &= \langle \alpha_{u_1}, \alpha_{u_3} \rangle = \frac{1}{2} (k'_3(u)) k_3(u) w^3 + \frac{1}{2} (k'_2(u)) k_3(u) v^2 w + O(4) \\
g_{23} &= \langle \alpha_{u_2}, \alpha_{u_3} \rangle = k_2(u) k_3(u) v w + \left( k_2(u) a_{12}(u) + \frac{1}{2} a_{30}(u) k_3(u) \right) v^2 w \\
&\quad + \frac{1}{2} a_{12}(u) k_3(u) w^3 + \left( a_{21}(u) k_3(u) + \frac{1}{2} k_2(u) a_{03}(u) \right) w^2 v \\
&\quad + \frac{1}{2} k_2(u) a_{21}(u) v^3 + O(4)
\end{aligned}$$

Numa vizinhança de  $c(u)$ , o vetor normal à hipersuperfície (4.10) tem a seguinte expressão:

$$N_\alpha = N_{\alpha,1}(u, v, w) v_1(u) + N_{\alpha,2}(u, v, w) v_2(u) + N_{\alpha,3}(u, v, w) v_3(u) + N_{\alpha,4}(u, v, w) v_4(u)$$

onde

$$\begin{aligned}
N_{\alpha,1} &= -\frac{1}{2} (k'_3(u)) w^2 - \frac{1}{2} (k'_2(u)) v^2 - \frac{1}{6} (a'_{30}(u)) v^3 \\
&\quad - \frac{1}{6} (a'_{03}(u)) w^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{du} a'_{21}(u) \right) v^2 w - \frac{1}{2} (a'_{12}(u)) v w^2 + O(4) \\
N_{\alpha,2} &= \cos(\varphi(u)) \sin(\theta) - [k_3(u) + \cos(\varphi(u)) \tau_1(u) \sin(\theta)] \cos(\varphi(u)) \cos(\theta) w \\
&\quad - [k_2(u) - v \tau_1(u) \cos(\varphi(u)) \sin(\theta)] \sin(\varphi(u)) v + O(2) \\
N_{\alpha,3} &= \sin(\theta) \sin(\varphi(u)) + [\cos(\varphi(u)) k_2(u) - \tau_1(u) (\sin(\varphi(u)))^2 \sin(\theta)] v \\
&\quad - [k_3(u) + \cos(\varphi(u)) \sin(\theta) \tau_1(u)] \sin(\varphi(u)) \cos(\theta) w + O(2) \\
N_{\alpha,4} &= \cos(\theta) - \tau_1(u) \sin(\varphi(u)) \cos(\theta) v \\
&\quad + (k_3(u) \sin(\theta) - (\cos(\theta))^2 \cos(\varphi(u)) \tau_1(u)) w + O(2)
\end{aligned}$$

Disto, os coeficientes  $\lambda_{ij}$  da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} &= \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2}, N_\alpha \right\rangle = -\tau_1(u) \cos(\varphi(u)) \sin(\theta) \\
&\quad - [2\tau_1(u) \cos(\varphi(u)) \sin(\theta) + k_2(u)] \tau_1(u) \sin(\varphi(u)) v \\
&\quad - [2\tau_1(u) \cos(\varphi(u)) \sin(\theta) + k_3(u)] \cos(\varphi(u)) \cos(\theta) \tau_1(u) w + O(2) \\
\lambda_{22} &= \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v \partial v}, N_\alpha \right\rangle = \sin(\theta) k_2(u) \sin(\theta) + [-a_{30}(u) v \\
&\quad + \tau_1(u) k_2(u) \sin(\varphi(u))] (\sin(\theta))^2 v \\
&\quad + [-a_{21}(u) \sin(\theta) + k_2(u) k_3(u) \cos(\theta) \\
&\quad + k_2(u) \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi(u)) \tau_1(u)] \sin(\theta) w + O(2) \\
\lambda_{33} &= \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_3^2}, N_\alpha \right\rangle = k_3(u) (\sin(\theta))^2 \\
&\quad + [a_{12}(u) - k_3(u) \sin(\varphi(u)) \tau_1(u)] (\sin(\theta))^2 v \\
&\quad - [\sin(\theta) k_3(u) \cos(\theta) \cos(\varphi(u)) \tau_1(u) + (k_3(u))^2 \cos(\theta) \\
&\quad - a_{03}(u) \sin(\theta)] \sin(\theta) w + O(2) \\
\lambda_{12} &= \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v}, N_\alpha \right\rangle = (k'_2(u)) (\sin(\theta))^2 v + O(2) \\
\lambda_{13} &= \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_1 \partial u_3}, N_\alpha \right\rangle = (k'_3(u)) (\sin(\theta))^2 w + O(2) \\
\lambda_{23} &= \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v \partial w}, N_\alpha \right\rangle = (\sin(\theta))^2 (a_{12}(u) w + a_{21}(u) v) + O(2)
\end{aligned}$$

Sejam  $p = \frac{dv}{du}$  e  $q = \frac{dw}{du}$ . Os valores críticos da curvatura normal

$$k_n(p, q) = \frac{\lambda_{11} + \lambda_{12}p + \lambda_{13}q + \lambda_{23}pq + \lambda_{22}p^2 + \lambda_{33}q^2}{g_{11} + g_{12}p + g_{13}q + g_{23}pq + g_{22}p^2 + g_{33}q^2}$$

são dados pela anulação do gradiente  $\nabla k_n(p, q) = \left( \frac{\partial k_n}{\partial p}, \frac{\partial k_n}{\partial q} \right)$ , e caracterizam as direções principais.

Para encontrarmos a matriz  $A(u) = \begin{pmatrix} p_{10} & p_{01} \\ q_{10} & q_{01} \end{pmatrix}$  do sistema (2.2), procedemos da seguinte maneira: Substituímos  $p = p_{10}u + p_{01}v$  e  $q = q_{10}u + q_{01}v$ ,

respectivamente, em  $\frac{\partial k_n}{\partial p} = 0$  e  $\frac{\partial k_n}{\partial q} = 0$  e, daí,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial k_n}{\partial p} \right) \Big|_{u=0=v} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial k_n}{\partial p} \right) \Big|_{u=0=v} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial k_n}{\partial q} \right) \Big|_{u=0=v} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial k_n}{\partial q} \right) \Big|_{u=0=v} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_{10} = -\frac{\left( \frac{d}{du} k_2(u) \right) \text{sen}(\theta)}{k_2(u) \text{sen}(\theta) - \tau_1(u) \cos(\varphi(u))} \\ p_{01} = 0 \\ q_{10} = 0 \\ q_{01} = -\frac{\left( \frac{d}{du} k_3(u) \right) \text{sen}(\theta)}{-\tau_1(u) \cos(\varphi(u)) + k_3(u) \text{sen}(\theta)} \end{array} \right.,$$

implicando que  $A(u)$  é diagonal, tornando possível integrar o sistema (2.2). Assim, os autovalores de  $\Pi'(0)$  são

$$\lambda_1 = \exp \left( \int_0^L -\frac{\left( \frac{d}{du} k_2(u) \right) \text{sen}(\theta)}{k_2(u) \text{sen}(\theta) - \tau_1(u) \cos(\varphi(u))} \right)$$

e

$$\lambda_2 = \exp \left( \int_0^L -\frac{\left( \frac{d}{du} k_3(u) \right) \text{sen}(\theta)}{-\tau_1(u) \cos(\varphi(u)) + k_3(u) \text{sen}(\theta)} \right).$$

Como queremos que  $|\lambda_i| \neq 1$ ,  $i = 1, 2$ , então

$$\begin{aligned} \int \frac{k'_2(s) \text{sen}\theta(s)}{k_2(s) \text{sen}\theta(s) - \tau_1(s) \cos \varphi(s)} &\neq 0 \\ \int \frac{k'_3(s) \text{sen}\theta(s)}{\tau_1(s) \cos \varphi(s) - k_3(s) \text{sen}\theta(s)} &\neq 0 \end{aligned}$$

para que  $c$  seja ciclo principal hiperbólico de  $\alpha$ , como queríamos. ■

**Teorema 4.9** *Seja  $c$  uma curva espacial fechada de comprimento  $L$  em  $\mathbb{R}^4$ . Então existe uma hipersuperfície orientável de classe  $C^r$ ,  $r \geq 4$ , contendo  $c$  e tendo-a como um ciclo principal hiperbólico.*

**Demonstração:** Considere a hipersuperfície parametrizada definida pela equação (4.10). Pela proposição 4.6,  $c$  é um ciclo principal quando  $\theta$  é constante e  $\varphi'(s) = -\tau_2(s)$ . Definindo

$$k_2(u) = -(1 - \cos(\varphi(s))) \frac{\tau_1(s)}{\text{sen}\theta} \text{ e } k_3(u) = -(2 - \cos(\varphi(s))) \frac{\tau_1(s)}{\text{sen}\theta},$$

temos que

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 = \ln(\lambda_1) &= \int \frac{k'_2(s) \operatorname{sen}\theta}{k_2(s) \operatorname{sen}\theta - \tau_1(s) \cos \varphi(s)} ds \\
&= \int \frac{k'_2(s) \operatorname{sen}\theta(s)}{-(1 - \cos(\varphi(s))) \frac{\tau_1(s)}{\operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen}\theta(s) - \tau_1(s) \cos \varphi(s)} ds \\
&= \int \frac{-\operatorname{sen}(\varphi(s))(\varphi'(s))\tau_1(s) + \tau'_1(s) \cos(\varphi(s)) - \tau'_1(s)}{-(1 - \cos(\varphi(s)))\tau_1(s) - \tau_1(s) \cos \varphi(s)} ds \\
&= \int \frac{(\operatorname{sen}(\varphi(s))(\varphi'(s))\tau_1(s) - \tau'_1(s) \cos(\varphi(s)) + \tau'_1(s))}{\tau_1(s)} ds \\
&= \int \frac{[-\tau_1(s)(\cos \varphi(s) - 1)]'}{\tau_1(s)} ds \\
\Lambda_2 = \ln(\lambda_2) &= \int \frac{k'_3(s) \operatorname{sen}\theta(s)}{\tau_1(s) \cos \varphi(s) - k_3(s) \operatorname{sen}\theta(s)} ds \\
&= \int \frac{-\operatorname{sen}(\varphi(s))(\varphi'(s))\tau_1(s) + (\tau'_1(s)) \cos(\varphi(s)) - 2\tau'_1(s)}{\tau_1(s) \cos \varphi(s) - (-(2 - \cos(\varphi(s))) \frac{\tau_1(s)}{\operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen}\theta(s))} ds \\
&= \int \frac{-\operatorname{sen}(\varphi(s))(\varphi'(s))\tau_1(s) + (\tau'_1(s)) \cos(\varphi(s)) - 2\tau'_1(s)}{\tau_1(s) \cos \varphi(s) - (-(2 - \cos(\varphi(s)))\tau_1(s))} ds \\
&= \int \frac{-\operatorname{sen}(\varphi(s))(\varphi'(s))\tau_1(s) + (\tau'_1(s)) \cos(\varphi(s)) - 2\tau'_1(s)}{2\tau_1(s)} ds \\
&= \int \frac{[\tau_1(s)(\cos \varphi(s) - 2)]'}{2\tau_1(s)} ds
\end{aligned}$$

Por hipótese a função  $-\tau_1(s)(\cos \varphi(s) - 1)$  não é constante. De fato,  $\tau_1(s)$  e como  $\varphi'(s) = -\tau_2(s)$  temos que  $\cos \varphi(s) - 1$  não é constante.

Se  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  são não nulos, significa que os autovalores de  $\Pi'(0)$  serão distintos de um, disto segue que  $c$  é hiperbólico e isso finaliza a prova. Se apenas um dos autovalores é igual a um o teorema 3.2, garante que existe uma perturbação que  $\alpha$ , tal que  $c$  será ciclo principal hiperbólico.

**Observação 4.10** Para o caso em que  $\operatorname{sen}\theta = 0$  a matriz  $A(s)$  será

$$A(s) = \begin{pmatrix} \frac{k'_2(s)}{k_2(s)} & \frac{k_3(s)(\tau_2(s) + \varphi'(s))}{k_2(s)} \\ -\frac{k_2(s)(\tau_2(s) + \varphi'(s))}{k_3(s)} & \frac{k'_3(s)}{k_3(s)} \end{pmatrix}.$$

Neste caso se garantirmos que  $A(s) \cdot \int A(s) ds = \int A(s) ds \cdot A(s)$ , temos que  $\Pi'(0) = \exp(\int A(s) ds)$ . Uma sugestão para trabalhos futuros seria descobrir para quais casos  $c$  seria um ciclo principal de  $\alpha$ .

■



## Apêndice A

# Aplicações lineares Auto-Adjuntas e Formas Quadráticas

Neste apêndice, denotaremos por  $V$  um espaço vetorial de dimensão 3, munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . O material que apresentamos a seguir pode ser facilmente generalizado para um espaço vetorial de dimensão  $n$ , mas, para simplificar, trataremos apenas o caso  $n = 3$ .

Diz-se que uma aplicação linear  $A : V \rightarrow V$  é auto-adjunta se  $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$  para todo  $v, w \in V$ .

Note que se  $\{e_1, e_2, e_3\}$  é uma base ortonormal de  $V$  e  $(\alpha_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , é a matriz de  $A$  relativa a esta base, então

$$\alpha_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle = \langle e_j, Ae_i \rangle = \langle Ae_i, e_j \rangle = \alpha_{ji};$$

isto é, a matriz  $(\alpha_{ij})$  é simétrica.

A cada aplicação linear auto-adjunta associamos uma aplicação  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$B(v, w) = \langle Av, w \rangle.$$

É claro que  $B$  é bilinear, isto é, é linear em ambos  $v$  e  $w$ . Além disso, o fato de que  $A$  é auto-adjunta implica que  $B(v, w) = B(w, v)$ ; isto é,  $B$  é uma forma bilinear e simétrica em  $V$ .

Reciprocamente, se  $B$  é uma forma bilinear e simétrica em  $V$ , podemos definir uma aplicação linear  $A : V \rightarrow V$  por  $\langle Av, w \rangle = B(v, w)$  e a simetria de  $B$  implica que  $A$  é auto-adjunta.

Por outro lado, a cada forma bilinear e simétrica em  $V$ , corresponde uma forma quadrática  $Q$  em  $V$  dada por

$$Q(v) = B(v, v), v \in V,$$

e o conhecimento de  $Q$  determina  $B$  completamente, pois

$$B(u, v) = \frac{1}{2}[Q(u + v) - Q(u) - Q(v)].$$

Assim, estabelecemos uma bijeção entre as formas quadráticas em  $V$  e aplicações lineares auto-adjuntas de  $V$ .

A meta desse apêndice é provar que (veja o teorema abaixo) dada uma aplicação linear auto-adjunta  $A : V \rightarrow V$ , existe uma base ortonormal de  $V$  tal que a matriz de  $A$  relativa a esta base é uma matriz diagonal. Além disso, os elementos da diagonal são máximos ou mínimos locais da forma quadrática correspondente restrita a esfera unitária de  $V$ .

**Lemma A.1** *Se a função  $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ , restrita à esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , tem um máximo no ponto  $(1, 0, 0)$ , então  $d = e = 0$*

**Demonstração:** Parametrize a esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  por  $x = \cos u \cos v$ ,  $y = \sin u \cos v$ ,  $z = \sin v$ ,  $u \in (0 - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon)$  e  $v \in (-\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)$ . Assim,  $Q$ , restrita a esta esfera, torna-se uma função de  $(u, v)$ :

$$\begin{aligned} Q(u, v) = & a \cos^2 u \cos^2 v + b \sin^2 u \cos^2 v + c \sin^2 v \\ & + 2d \cos u \sin u \cos^2 v + 2e \cos u \cos v \sin v + 2f \sin v \cos v \sin v. \end{aligned}$$

Como  $Q$ , tem um máximo no ponto  $(1, 0, 0)$ , temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{dQ}{du} \right) \Big|_{(0,0)} = & (-2a \cos u \sin u \cos^2 v + 2b \sin u \cos u \cos^2 v \\ & + 2d \cos^2 v (-\sin^2 u + \cos^2 u) - 2e \sin u \cos v \sin v \\ & + 2f \cos^2 v \cos^2 u) \Big|_{(0,0)} = 2d = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left( \frac{dQ}{dv} \right) \Big|_{(0,0)} = & -(a \cos^2 u + b \sin^2 u) 2 \cos v \sin v + 2c \sin v \cos v \\ & - 2 \cos v \sin v d \cos u \sin u + (2e \cos u + 2f \sin u) (\cos^2 v - \sin^2 v) \\ = & 2e = 0. \end{aligned}$$

Disto, segue o que queríamos. ■

**Lemma A.2** *Se a função  $Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ , restrita à esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , tem um máximo no ponto  $(1, 0, 0)$ , e  $Q_1 = Q|_{V_1}$  tem um máximo em  $(0, 1, 0)$ , então  $d = e = f = 0$ , sendo  $V_1 \subset S^2$  o espaço ortogonal a  $(1, 0, 0)$ .*

**Demonstração:** Pelo lema anterior, temos que  $d = e = 0$ . Daí, temos que

$$Q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz.$$

Sejam  $\{e_1, e_2, e_3\}$  base de  $S^2 \subset V$ , temos que o espaço ortogonal a  $e_1$  é um círculo unitário gerado por  $e_2$  e  $e_3$ . Assim,  $Q$ , restrita a  $V_1$ , torna-se uma função de  $v$ :

$$Q_1(x, y, z) = b \cos^2 v + c \sin^2 v + 2f \cos v \sin v.$$

Como  $Q|_{V_1}$ , tem um máximo no ponto  $(0, 1, 0)$ , temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{dQ_1}{dv} \right) \Big|_{(0,0)} &= (-2b \cos v \sin v + 2c \sin v \cos v + 2f(-\sin^2 v + \cos^2 v)) \Big|_{(0,0)} \\ &= 2f = 0, \end{aligned}$$

isso conclui a prova do teorema. ■

**Proposição A.3** *Dada uma forma quadrática  $Q$  em  $V$ , existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $V$  tal que se  $v \in V$  é dado por  $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ , então*

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2,$$

onde  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , sendo  $\lambda_1$  é máximo e  $\lambda_3$  é mínimo de  $Q$  restrito a  $S^2$  e  $\lambda_2$  é máximo de  $Q$  restrita a um círculo unitário gerado por  $[e_2, e_3]$ .

**Demonstração:** Como  $S^2$  é compacta e  $Q$  é contínua, temos que  $Q$  possui um máximo. Seja  $\lambda_1$  o máximo de  $Q$  sobre a esfera unitária  $|v| = 1$ , e seja  $e_1$  um vetor unitário tal que  $Q(e_1) = \lambda_1$ . Seja também  $\lambda_2$  o máximo de  $Q$  restrito ao círculo unitário ortogonal à  $e_1$  e seja  $e_2$  um vetor unitário tal que  $Q(e_2) = \lambda_2$  e tome  $e_3$  como o vetor ortogonal à  $e_1$  e  $e_2$ , sendo  $Q(e_3) = \lambda_3$ .

Seja  $B$  a forma simétrica bilinear associada a  $Q$  e  $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ . Então

$$\begin{aligned} Q(v) &= B(v, v) = B(xe_1 + ye_2 + ze_3, xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= B(e_1, e_1)x^2 + B(e_2, e_2)y^2 + B(e_3, e_3)z^2 \\ &\quad + 2dB(e_1, e_2)xy + 2eB(e_1, e_3)xz + 2fB(e_2, e_3)yz \end{aligned}$$

pelo lema anterior, temos que  $B(e_1, e_2) = B(e_1, e_3) = B(e_2, e_3) = 0$ , então

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2.$$

Resta provar que  $\lambda_3$  é o mínimo de  $Q$  sobre a esfera  $|v| = 1$ . Isto é imediato, pois

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 \geq \lambda_3(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda_3.$$

■

Diz-se que um vetor  $v \neq 0$  é um autovetor de uma aplicação linear  $A : V \rightarrow V$  se  $Av = \lambda v$  para algum número real  $\lambda$ ;  $\lambda$  é então chamado um autovalor de  $A$ .

**Teorema A.4** *Seja  $A : V \rightarrow V$  uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $V$  tais que  $A(e_1) = \lambda_1 e_1$ ,  $A(e_2) = \lambda_2 e_2$  e  $A(e_3) = \lambda_3 e_3$  (isto é,  $e_1, e_2$  e  $e_3$  são autovetores, e  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são autovalores de  $A$ ). Na base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , a matriz de  $A$  é diagonal e os elementos  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_3$ , da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática  $Q(v) = \langle Av, v \rangle$  sobre a esfera unitária de  $V$ .*

**Demonstração:** Considere a forma quadrática  $Q(v) = \langle Av, v \rangle$ . Pela proposição acima, existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $V$ , tal que  $Q(e_1) = \lambda_1$ ,  $Q(e_2) = \lambda_2$ ,  $Q(e_3) = \lambda_3$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , sendo  $\lambda_1$  é máximo e  $\lambda_3$  é mínimo de  $Q$  restrito a  $S^2$  e  $\lambda_2$  é máximo de  $Q$  restrita a um círculo unitário gerado por  $[e_2, e_3]$ . Resta provar, portanto, provar que

$$A(e_1) = \lambda_1 e_1, A(e_2) = \lambda_2 e_2, A(e_3) = \lambda_3 e_3.$$

Como  $B(e_1, e_2) = \langle Ae_1, e_2 \rangle = 0$ ,  $B(e_1, e_3) = \langle Ae_1, e_3 \rangle = 0$  (pelo lema) e  $e_2 \neq 0$  e  $e_3 \neq 0$ , temos que  $Ae_1$  é paralelo a  $e_1$  ou  $A(e_1) = 0$ . Se  $Ae_1$  é paralelo a  $e_1$ , então  $Ae_1 = \alpha e_1$ , e como  $\langle Ae_1, e_1 \rangle = \lambda_1 = \langle \alpha e_1, e_1 \rangle = \alpha$ , concluímos que  $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ ; se  $Ae_1 = 0$ , então  $\lambda_1 = \langle Ae_1, e_1 \rangle = 0$ , e  $Ae_1 = 0 = \lambda_1 e_1$ . Assim, em qualquer caso, temos que  $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ .

Agora usando o fato de que

$$B(e_2, e_1) = B(e_2, e_3) = 0 \text{ e } B(e_3, e_1) = B(e_3, e_2) = 0$$

e que

$$\langle A(e_2), e_2 \rangle = \lambda_2$$

$$\langle A(e_3), e_3 \rangle = \lambda_3$$

podemos, da mesma forma, provar que  $Ae_2 = \lambda_2 e_2$  e  $Ae_3 = \lambda_3 e_3$ .

■

# Referências Bibliográficas

- [1] BUENO, H. P. *Álgebra Linear: um segundo curso*. 1ed; Rio de Janeiro - SBN, 2006.
- [2] DO CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. 3ed; Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [3] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana; Rio de Janeiro*. SBM, 2004.
- [4] GARCIA, R. A. *Hyperbolic Principal cycles on Hypersurfaces of  $\mathbb{R}^4$* . *Anal. of Global Analysis and Geometry* 11: 185-196, 1993.
- [5] GARCIA, R.; MELLO, L. F.; SOTOMAYOR, J. *Surfaces Around Closed Principal Curvature Lines, an Inverse Problem*. London Mathematical Society, pp. 158-166, 2010.
- [6] GUTIERREZ, C.; SOTOMAYOR, J. *Closed principal lines and bifurcations*. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 17, (1986), 1–19.
- [7] GUTIERREZ C.; SOTOMAYOR J.; GARCIA, R. A. *Bifurcations of umbilic points and related principal cycles* *J. Dynam. Differential Equations* 16 (2004), 321–346.
- [8] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. vol 2; 11ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [9] SOTOMAYOR, J. *Equações diferenciais ordinárias* 1ed; São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [10] TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.
- [11] VARÃO FILHO, J. R. A. *Geometria e Topologia*. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/regisvarao/out/topo.dif.pdf>